

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + 2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Пусть такое разбиение существует, причём в одной из групп оказались числа $1 + x_1\sqrt{2}, 1 + x_2\sqrt{2}, \dots, 1 + x_k\sqrt{2}$. Перемножим эти выражения, раскроем скобки. Мы получим слагаемое $1^k = 1$, слагаемые $x_1\sqrt{2}, \dots, x_k\sqrt{2}$, а все остальные слагаемые будут иметь вид $N \cdot (\sqrt{2})^k$, где $k \geq 2$ и N — целые числа. Значит, в сумме получится число вида $A + B\sqrt{2}$, где A и B — целые числа, причём $B \equiv x_1 + \dots + x_k \pmod{2}$. Аналогично, если в другой группе окажутся числа $1 + y_1\sqrt{2}, \dots, 1 + y_n\sqrt{2}$, то их произведение будет иметь вид $C + D\sqrt{2}$, где $C, D \in \mathbb{Z}$ и $D \equiv y_1 + \dots + y_n \pmod{2}$.

Заметим, что $x_1 + \dots + x_k + y_1 + \dots + y_n = 1 + 2 + \dots + 2026 = 2027 \cdot 1013$, это число нечётно. Значит, число $B + D$ тоже нечётно, а тогда $B \not\equiv D \pmod{2}$. Однако, поскольку числа $A + B\sqrt{2}$ и $C + D\sqrt{2}$ имеют одинаковую дробную часть, то их разность — целое число. Поскольку $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ это возможно лишь в случае, когда $B - D = 0$, противоречие.

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$ удовлетворяет равенству

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} = a_n^2$$

при всех натуральных n . Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

Ответ: Только одна последовательность $1, 3, 5, \dots$ (т.е. $a_n = 2n - 1$).

Решение. Указанная в ответе последовательность удовлетворяет условию

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} = a_n^2. \quad (*)$$

Действительно, $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2(2n-1) - 1) = (2n-1)^2 = a_n^2$.

Далее из условия (*) выведем, что $a_n = 2n - 1$ при всех n .

Вычитая равенства (*) для индексов $n+1$ и n , получим

$$a_{2n+1} + a_{2n} = a_{n+1}^2 - a_n^2. \quad (1)$$

Левая часть равенства (1) положительна, поэтому $a_{n+1} > a_n$, значит, наша последовательность строго возрастает.

Далее, если для какого-то натурального n будет выполнено $a_{n+1} - a_n = 1$, то из (1) последовало бы $a_{2n+1} + a_{2n} = a_{n+1} + a_n$. Однако в силу монотонности $a_{2n+1} > a_{n+1}$ и $a_{2n} > a_n$, и поэтому $a_{2n+1} + a_{2n} > a_{n+1} + a_n$. Полученное противоречие показывает, что $a_{n+1} - a_n = 1$ невозможно, поэтому для всех номеров n выполнено $a_{n+1} - a_n \geq 2$. Тогда, начиная с неравенства $a_1 \geq 1$ последовательно выводим: $a_2 \geq 3$, $a_3 \geq 5$, и т.д.,

$$a_k \geq 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Наконец покажем индукцией по n с базой $n = 2$, что (2) обращается в равенство при всех $k = 1, 2, \dots, 2n - 1$.

Докажем базу. Заметим, что (*) при $n = 1$ дает $a_1 = 1$. В силу (2), $a_2 \geq 3$ и $a_k > 3$ при $k > 2$. Поскольку число 3 должно содержаться в последовательности, имеем $a_2 = 3$. Тогда из (*) для $n = 2$ получаем $a_3 = a_2^2 - a_1 - a_2 = 5$.

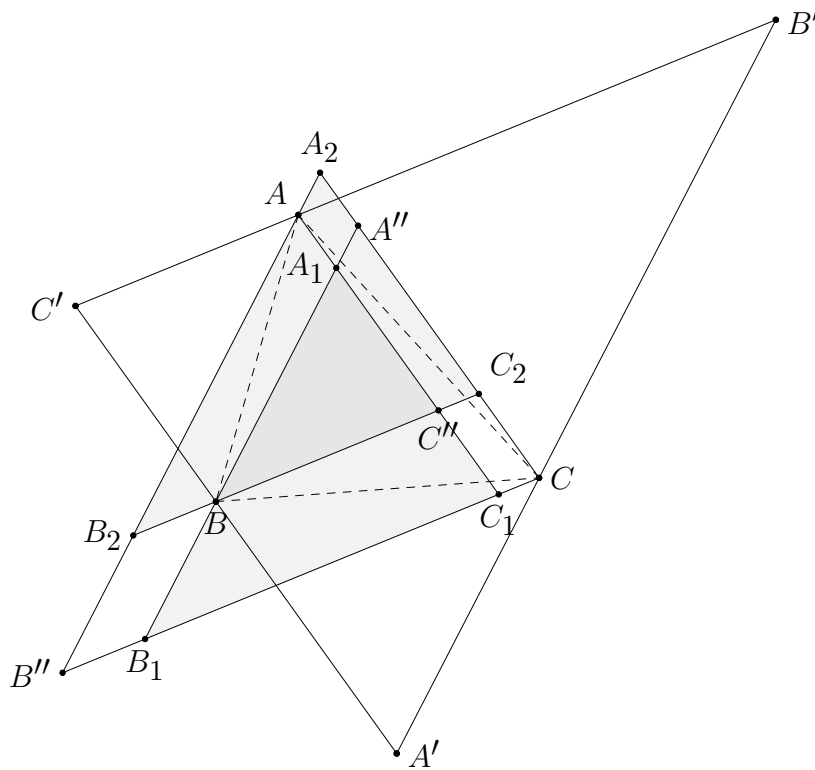
Докажем переход $n \rightarrow n+1$, где $n \geq 2$, т.е. из того, что $a_k = 2k - 1$ для $k = 1, 2, \dots, 2n - 1$, выведем, что $a_{2n} = 4n - 1$ и $a_{2n+1} = 4n + 1$. Так как $n + 1 \leq 2n - 1$, по предположению

индукции $a_{n+1} = 2n + 1$ и $a_n = 2n - 1$. Тогда из (1) получаем $a_{2n+1} + a_{2n} = (2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n$. Но как мы помним (согласно (2)) $a_{2n+1} \geq 4n + 1$ и $a_{2n} \geq 4n - 1$, откуда $8n = a_{2n+1} + a_{2n} \geq 8n$. Значит, оба неравенства $a_{2n+1} \geq 4n + 1$, $a_{2n} \geq 4n - 1$ обращаются в равенство. Этим заканчивается доказательство индукционного перехода.

- 10.3. Остроугольный неравобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а его высоты пересекаются в точке H . Касательные к окружности (BHC) в точке B , к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1 . Касательные к окружности (BHC) в точке C , к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2 . Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.

(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ .)

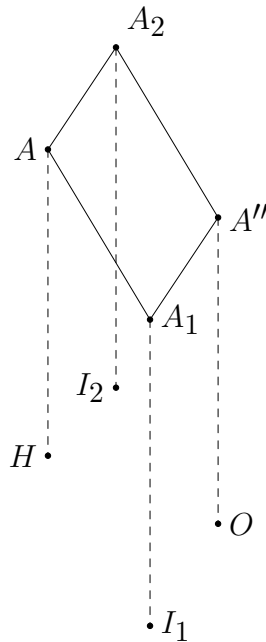
Решение. Пусть касательные, проведенные к окружности (ABC) в вершинах A, B, C , образуют треугольник $A'B'C'$ (см. рис.).



Поскольку $\angle BAC + \angle BHC = 180^\circ$, окружности (ABC) и (AHC) симметричны относительно середины BC . Пусть касательные, проведенные к B и C к окружности (BHC) , пересекаются в A'' . Тогда касательные CA' и BA'' симметричны относительно середины BC ; то же верно для BA' и CA'' . Отсюда $BA'CA''$ — параллелограмм, и даже ромб (в силу равенства отрезков касательных $A'B = A'C$). Аналогично, строим ромбы $CB'AB''$ и $AC'BC''$.

Видим, что стороны наших треугольников T_1 и T_2 параллельны соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$. Обозначим их вершины $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, где $A_1 = CA'' \cap AB''$, и т.д. Также из этих параллельностей мы видим, что $AA_1A''A_2$ — параллелограмм.

Заметим, что O лежит на биссектрисе l угла $BA'C$, а значит и на биссектрисе угла $BA''C$ (из ромба $BA'CA''$). Но $A'O \perp BC$, откуда $A''O \perp BC$. Биссектриса A_1I_1 угла $C_1A_1B_1$ параллельна l (так как биссектрисы углов с сонаправленными сторонами параллельны). Аналогично $A_2I_2 \parallel l$. Наконец $AH \perp BC$. Таким образом, в нашей конструкции через вершины параллелограмма $AA_1A''A_2$ проведены параллельные прямые (перпендикулярные BC) $AH, A_1I_1, A''O, A_2I_2$.



Значит, середины N и P отрезков OH и I_1I_2 лежат на одной прямой $m \perp BC$ (проходящей через центр параллелограмма). Иначе говоря, проекции точек N и P на прямую BC совпадают.

Аналогично рассуждая, показываем, что проекции точек N и P на прямую CA совпадают. Значит, N и P совпадают, что и требовалось показать.

- 10.4. Даны натуральные числа m и k , причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m - 1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k . Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ: Петя побеждает при $2 \leq k \leq m + 1$; иначе побеждает Вася.

Решение. Переформулируем задачу следующим образом. Пусть изначально у нас на числовой прямой покрашены красным точки $0, 1, 2, \dots, 2m$ (а шарики из условия соответствуют единичным отрезкам $[i, i + 1]$). За свой ход игрок перекрашивает одну из красных точек, отличных от точек 0 и $2m$, в синий цвет (склеивает два отрезка между соседними красными точками). Так Петя и Вася по очереди делают ходы (Петя — m ходов, Вася — $(m - 1)$ ход), пока в конце не останутся лишь две красные точки 0 и $2m$. Петя выигрывает, если в какой-то момент игры найдутся красные точки i и $i + k$ такие, что все целые точки между ними синие.

1) Пусть $2 \leq k \leq m$. Предъявим стратегию за Петю. Первым ходом пусть он покрасит синим точку k . Выделим $k - 1$ пар красных точек $(1, k + 1), (2, k + 2), \dots, (k - 1, 2k - 1)$, а красные точки $2k, 2k + 1, \dots, 2m - 1$ разобьем на пары произвольно. Если за свой ход Вася перекрашивает в синий цвет некоторую точку, то пусть Петя на следующем ходе перекрасит вторую точку из той же пары. В результате после ходов Пети все выделенные пары точек одноцветные, причем количество выделенных пар красных точек не изменяется или уменьшается на 1. В какой-то момент после хода Пети будет ровно одна выделенная пара $(j, j + k)$ красных точек. В этот момент среди точек $1, 2, \dots, 2k - 1$ только j и $j + k$ красные, значит все целые точки между ними синие, и Петя выигрывает.

2) Пусть $k = m + 1$. Предъявим стратегию за Петю. Первым ходом пусть он покрасит синим точку m . Остальные красные точки, за исключением 0 и $2m$, разобьем на пары: $(1, m + 2), (2, m + 3), \dots, (m - 2, 2m - 1)$ и $(m - 1, m + 1)$. Если за свой ход Вася перекрашивает в синий цвет некоторую точку, то пусть Петя на следующем ход перекрасит вторую точку из той же пары. В результате перед последним ходом Васи останется ровно одна указанная

пара красных точек (а точки во всех остальных парах будут синими). Если это пара вида $(i, i + m + 1)$, то Петя уже побеждает. Пусть это пара $(m - 1, m + 1)$. Перекрашивая последним ходом $m - 1$, Вася проигрывает из-за пары красных точек $(0, m + 1)$. Аналогично, перекрашивая последним ходом $m + 1$, он проигрывает из-за пары $(m - 1, 2m)$.

3) Пусть $m + 2 \leq k \leq 2m - 1$. Предъявим стратегию за Васю. Рассмотрим последовательность точек $A = (k, 1, 2, \dots, 2m - k)$. Пусть Вася на своем ходе перекрашивает самую первую на текущий момент красную точку в этой последовательности. Так как $|A| = 2m - k + 1 \leq m - 1$, ходов у Васи хватит, чтобы все точки из A в итоге стали синими. После этого пусть Вася играет как угодно. Покажем что такая стратегия работает. Предположим противное, в какой-то момент точки i и $i + k$ красные (для некоторого $i \in \{0, 1, 2, \dots, 2m - k\}$), а все $k - 1$ целых точек из интервала $(i, i + k)$ — синие. Не может быть $i = 0$, так как точка k стала на первом же ходу Васи синей, и к этому моменту среди точек $1, \dots, k - 1$ было не более одной синей. Пусть $i \geq 1$. Поскольку i еще красная, Вася пока только перекрашивал точки множества $\{k, 1, 2, \dots, i - 1\}$, т.е. сделал к рассматриваемому моменту не более i ходов, при этом лишь один раз он перекрашивал точку из интервала $(i, i + k)$ (точку k). Тогда к этому моменту Петя сделал не более $i + 1$ хода. Значит, к этому моменту среди целых точек интервала $(i, i + k)$ синими стали не более $1 + i + 1$ точки. Но $i + 2 \leq 2m - k + 2 \leq k - 2$, тем самым в $(i, i + k)$ осталась хотя бы одна красная точка — противоречие.