

10 класс

Второй день

- 10.5. Существует ли выпуклый 201-угольник, в котором каждая диагональ перпендикулярна какой-то другой диагонали?

Ответ: Да, существует.

Решение. Возьмем правильный 202-угольник Q , выделим в нем вершину A . Нужный нам пример — 201-угольник P с вершинами во всех вершинах Q , кроме вершины A .

Действительно, любая диагональ d многоугольника P служит также диагональю в Q . Поэтому в Q имеется хотя бы 99 диагоналей направления, перпендикулярного d . Среди этих 99 диагоналей заведомо найдется диагональ P (точно подойдет любая из этих диагоналей, не проходящая через вершину A и соседние с ней вершины).

Замечание. На аналогичный вопрос для выпуклого n -угольника ответ положительный для всех $n \geq 4$ кроме $n = 5$. Для четных n примером является правильный n -угольник; при нечетных $n > 5$ — правильный $(n + 1)$ -угольник с вычеркнутой вершиной (как в решении); также нетрудно показать, что требуемого 5-угольника не существует.

- 10.6. В стране ровно 1000 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для любого натурального $k \leq 500$ выполнено следующее утверждение: «Если выбрать любое множество A из k городов, то найдётся хотя бы k городов, не принадлежащих A , каждый из которых соединён авиалинией хотя бы с одним городом из A ». Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

Ответ: 250000.

Решение. Положим $n = 500$, так что в нашем графе $2n$ вершин.

Оценка. Докажем, что в нашем графе степени всех вершин хотя бы n . Отсюда будет следовать, что количество ребер не меньше $2n \cdot n/2 = n^2$.

Пойдём от противного: пусть у некоторой вершины v степень не больше $n - 1$. Тогда можно взять множество A из n вершин, каждая из которых не соединена с v . Для множества A условие не будет выполнено. Противоречие.

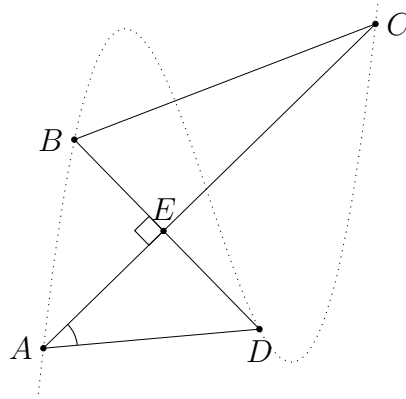
Пример. В качестве примера можно взять $K_{n,n}$ (полный двудольный граф на $2n$ вершинах с равными долями). Нетрудно проверить, что он удовлетворяет условию: если множество вершин A принадлежит одной доле, то любая из n вершин другой доли соединена с (любой) вершиной из A ; если же в A есть вершины из обеих долей, то любая вершина, не лежащая в A , соединена хотя бы с одной вершиной из A (лежащей в противоположной доле).

- 10.7. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то они равны между собой.

Решение. *Лемма.* Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. На графике $y = P(x)$ взяты две различные точки A и B с целыми координатами. Тогда прямая AB либо параллельна горизонтальной прямой, либо образует с ней угол, не меньший 45° .

Доказательство. Пусть a и b — абсциссы точек A и B , тогда угловой коэффициент k прямой AB равен $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$, что равно целому числу (как известно, $P(b) - P(a)$ делится на $b - a$ для любого многочлена с целыми коэффициентами P). В случае $k = 0$ прямая AB горизонтальная. Иначе $|k| \geq 1$, значит AB образует с горизонталью угол, не меньший 45° . $\square$

Перейдём к задаче. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, где $AC \perp BD$. Так как AC не вертикальная, то BD — не горизонтальная. Аналогично AC не горизонтальная. Произведение $k_1 k_2$ угловых коэффициентов прямых AC и BD равно -1 . Но согласно лемме $|k_i| \geq 1$. Значит, эти коэффициенты равны 1 и -1 . Для определенности пусть AC параллельна прямой $y = x$, а BD — прямой $y = -x$.



Пусть $E = AC \cap BD$. Для определенности, пусть A и D расположены ниже E (а C и B — выше). Для определенности, пусть A не выше чем D . Тогда прямая AD образует с горизонталью угол $\varphi = 45^\circ - \angle EAD$. Поскольку $\varphi \in [0, 45^\circ)$, согласно лемме, имеем $\varphi = 0$, т.е. прямая AD горизонтальная. Аналогично показываем, что BC горизонтальная. Тем самым, $ABCD$ симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через E . Отсюда $AC = BD$.

- 10.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a , b и c . Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

Решение 1. Предположим, что все три числа $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ являются полными квадратами. Пусть, не умаляя общности, $a < b < c$. При этом, по неравенству треугольника, $a + b > c$. Заметим, что числа $(ca + 1)(cb + 1)$ и $c^2(ab + 1)$ являются полными квадратами, то есть $(ca + 1)(cb + 1) = x^2$ и $c^2(ab + 1) = y^2$ для некоторых натуральных x и y . Разность $d = x^2 - y^2$ равна $c(a + b - c) + 1$. Видим, что $d > 0$, а тогда $x \geq y + 1$. Значит, $d \geq (y + 1)^2 - y^2 = 2y + 1 = 2c\sqrt{ab + 1} + 1$. Но тогда имеем

$$d \geq 2c\sqrt{ab + 1} + 1 > 2ac + 1 > ac + 1 > c(a + b - c) + 1 = d,$$

то есть $d > d$. Противоречие.

Решение 2. Не умаляя общности, можно считать, что c — наибольшее из чисел. Предположим противное: пусть $ab + 1 = z^2$, $ac + 1 = y^2$, $bc + 1 = x^2$, где x , y , z — натуральные числа. Тогда $x^2 < c^2 + 1$, откуда $x \leq c$. Аналогично, $y \leq c$. С другой стороны, $(x + y)^2 > x^2 + y^2 > c(a + b) > c^2$ (здесь мы воспользовались неравенством треугольника). Значит, $x + y > c$. Отсюда следует, что $x + y > c \geq \max(x, y) > |x - y|$.

Заметим, что $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = abc^2 = (z^2 - 1)c^2$. Преобразуя это равенство, получаем

$$(zc)^2 - c^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) = (xy + 1)^2 - (x + y)^2 = (xy - 1)^2 - (x - y)^2.$$

Выше мы получили, что $x + y > c > |x - y|$. Тогда из полученных равенств следует, что $xy + 1 > zc > xy - 1$, а такое возможно только если $zc = xy$. Но, так как $x^2 = bc + 1$, числа x и c взаимно просты, и аналогично y взаимно просто с c . Но xy кратно c , откуда $c = 1$. Это невозможно, поскольку c — максимальное из трёх различных натуральных чисел.