

11 класс

Первый день

- 11.1. Можно ли 2026 чисел $1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + 2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

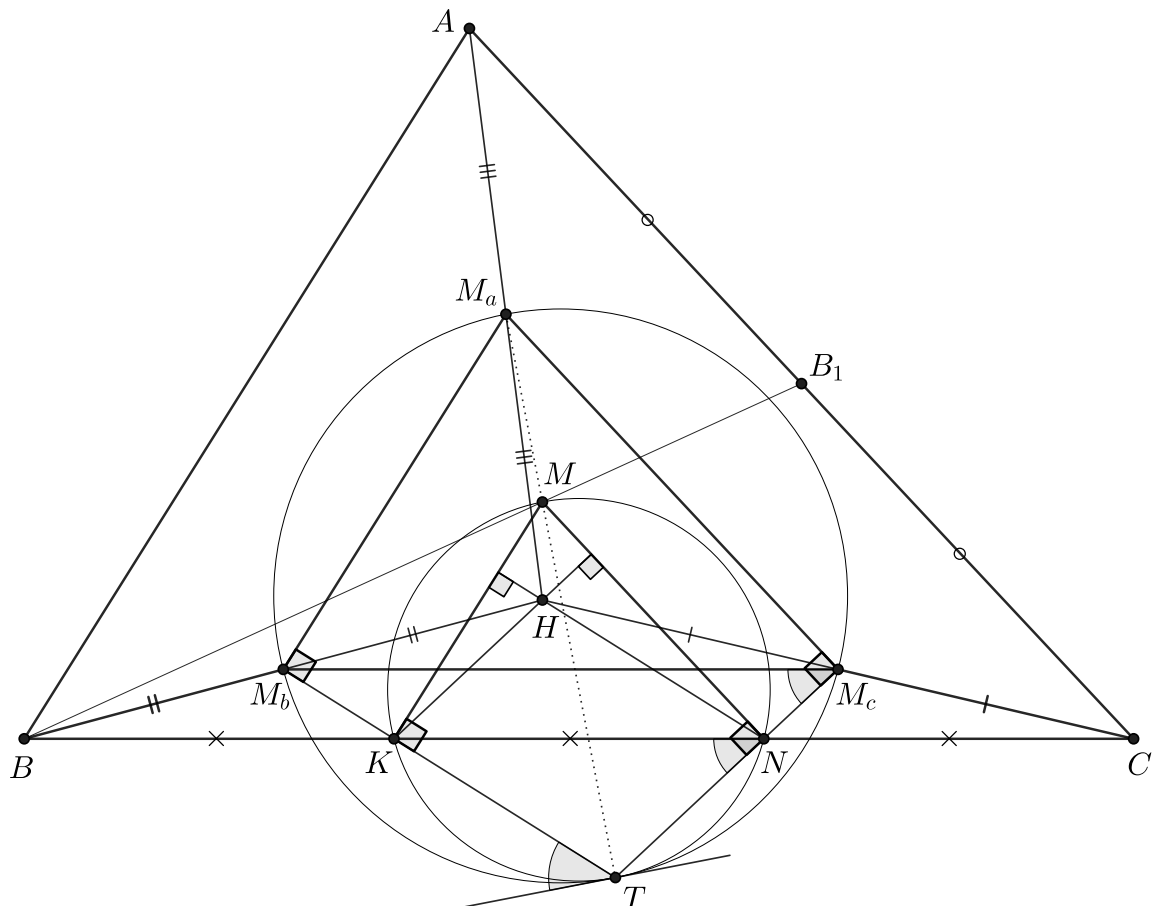
Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Пусть такое разбиение существует, причём в одной из групп оказались числа $1 + x_1\sqrt{2}, 1 + x_2\sqrt{2}, \dots, 1 + x_k\sqrt{2}$. Перемножим эти выражения, раскроем скобки. Мы получим слагаемое $1^k = 1$, слагаемые $x_1\sqrt{2}, \dots, x_k\sqrt{2}$, а все остальные слагаемые будут иметь вид $N \cdot (\sqrt{2})^k$, где $k \geq 2$ и N — целые числа. Значит, в сумме получится число вида $A + B\sqrt{2}$, где A и B — целые числа, причём $B \equiv x_1 + \dots + x_k \pmod{2}$. Аналогично, если в другой группе окажутся числа $1 + y_1\sqrt{2}, \dots, 1 + y_n\sqrt{2}$, то их произведение будет иметь вид $C + D\sqrt{2}$, где $C, D \in \mathbb{Z}$ и $D \equiv y_1 + \dots + y_n \pmod{2}$.

Заметим, что $x_1 + \dots + x_k + y_1 + \dots + y_n = 1 + 2 + \dots + 2026 = 2027 \cdot 1013$, это число нечётно. Значит, число $B + D$ тоже нечётно, а тогда $B \neq D$. Однако, поскольку числа $A + B\sqrt{2}$ и $C + D\sqrt{2}$ имеют одинаковую дробную часть, то их разность — целое число. Поскольку $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, это возможно лишь в случае, когда $B - D = 0$, противоречие.

- 11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M . На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK = KN = NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H . Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков AH , BH и CH , касается описанной окружности треугольника MKN .

Решение. Обозначим через M_a , M_b и M_c — середины отрезков AH , BH и CH соответственно. Поскольку M_aM_b — средняя линия треугольника AHB , то $M_aM_b \parallel AB$. Аналогично $M_bM_c \parallel BC$ и $M_cM_a \parallel CA$.



Пусть BB_1 — медиана треугольника ABC . Тогда $BM : MB_1 = 2 : 1 = BN : NC$, поэтому $MN \parallel AC$. Аналогично $KM \parallel AB$. Итого соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и MKN параллельны.

Заметим, что M_bK — средняя линия треугольника BHN . Поскольку $NH \perp KM$, то прямая M_bK перпендикулярна MK и M_aM_b . Аналогично $M_cN \perp M_cM_a$, $M_cN \perp MN$, поэтому прямые M_bK и M_cN пересекаются в некоторой точке T , лежащей и на окружности (MKN) , и на окружности $(M_aM_bM_c)$. Как мы знаем, $M_bM_c \parallel KN$. Обозначим тогда $\angle TM_cM_b = \angle TNK = \alpha$. Получаем, что у окружностей (MKN) и $(M_aM_bM_c)$ общая касательная в точке T (прямая, образующая с прямой TK угол α , см. рис.), откуда и следует касание окружностей.

Замечание. Приведём план другого решения. Как и в предыдущем подходе покажем, что соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и MKN параллельны. Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом

$$\frac{M_aM_c}{KN} = \frac{M_aM_c}{BC} \cdot \frac{BC}{KN} = \frac{3}{2}.$$

Обозначим через AA_1 медиану треугольника ABC , через M' — точку, симметричную H относительно A_1 . Тогда, как известно, полученная точка диаметрально противоположна M на окружности (MKN) . Поскольку $AM : MA_1 = 2 : 1$, то M — точка пересечения медиан треугольника $AM'H$, поэтому $\overrightarrow{M'M_a} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{M'M}$. Таким образом, при гомотетии с центром в точке M' и коэффициентом $3/2$ треугольник MKN переходит в треугольник $M_aM_bM_c$. Поскольку ещё и точка M' лежит на окружности (MKN) , то описанные окружности этих треугольников касаются в точке M' .

Разумеется, построенная точка M' совпадает с точкой T из предыдущего решения. Треугольник $AM'H$ может быть вырожденным, но и в этом случае выполняется соответствующее векторное равенство.

- 11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из $n > 1$ регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

Решение. Рассмотрим граф G , в котором вершины соответствуют участникам, а рёбра соединяют пары друзей. Тогда нам известно, что вершины можно окрасить в n цветов так, что в каждом простом цикле не более половины вершин будут одноцветными (назовём такую окраску *приятной*). Нужно же доказать, что можно вершины окрасить в n цветов правильным образом.

Назовём цвет *правильным*, если никакие две вершины этого цвета не соединены; иначе назовём его *неправильным*. Рассмотрим любую приятную окраску вершин и два цвета A и B в ней. Мы докажем, что можно перекрасить вершины этих цветов (окрасив каждую снова либо в A , либо в B) так, что оба этих цвета станут правильными, и раскраска останется приятной. Заметим, что при такой операции любой другой правильный цвет останется правильным. Значит, проделав такую операцию несколько раз, задействовав каждый цвет хотя бы по разу, мы получим правильную окраску вершин, что и требовалось.

Осталось показать, как совершить перекраску для двух цветов. Рассмотрим лишь граф H на вершинах цветов A и B (со всеми рёбрами, соединяющими пары этих вершин). Если в H есть простой цикл, то в нём не больше половины вершин цвета A и не больше половины — цвета B , то есть вершин обоих цветов в нём ровно по половине. Следовательно, этот цикл чётный. Таким образом, в графе H нет нечётных циклов; как известно, вершины такого графа можно правильно окрасить в два цвета.

Сделаем такую окраску в цвета A и B ; оба этих цвета стали правильными. Осталось доказать, что в любом простом цикле в исходном графе G по-прежнему не более половины

вершин одного цвета. Это условие могло нарушиться лишь для цветов A или B ; покажем, что оно не нарушилось, скажем, для цвета A . Сопоставим каждой вершине цикла, имеющей цвет A , следующую за ней по циклу. Сопоставленные вершины будут иметь цвета, отличные от A , и все они будут различными. Значит, вершин цвета A в цикле столько же, сколько сопоставленных им вершин других цветов, то есть не больше половины общего числа вершин в цикле, что и требовалось.

Замечание. Рассуждение из последнего абзаца решения показывает, что если вершины окрашены правильным образом, то в любом простом цикле не более половины одноцветных вершин. Таким образом, существование правильной раскраски *равносильно* существованию раскраски из условия.

- 11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \dots, y_{100}$ у многочлена $P(x) - 1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \dots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n ?

Ответ: 101.

Решение. Начнём с *примера*. Положим

$$Q(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-100) + \frac{1}{100}.$$

Пусть $a \in \left\{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \dots, 100\frac{1}{2}\right\}$. Тогда $|a(a-1)\dots(a-99)| > \frac{1}{4}$, поскольку два множителя равны по модулю $\frac{1}{2}$, а остальные больше, чем 1. Следовательно, знаки значений $Q(x)$ в этих точках чередуются: $Q\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $Q\left(1\frac{1}{2}\right) < 0, \dots, Q\left(100\frac{1}{2}\right) > 0$, поэтому между каждыми двумя соседними из них у многочлена Q есть корень. Таким образом, у этого многочлена 100 различных вещественных корней $x_1, x_2, \dots, x_{100}$. Положим $P(x) = xQ(x)$. Тогда $P(x) - 1 = x(x-1)\dots(x-100) + \frac{x}{100} - 1 = (x-100)\left(x(x-1)\dots(x-99) + \frac{1}{100}\right) = (x-100)Q(x+1)$.

Итого числа $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ — корни многочлена $P(x)$, а числа $x_1-1, x_2-1, \dots, x_{100}-1$ являются корнями многочлена $P(x) - 1$, тем самым, построенный многочлен $P(x)$ степени 101 подходит под условие задачи.

Теперь докажем *оценку*, что $\deg P \geq 101$. Предположим, что это неверно; поскольку у многочлена P есть 100 вещественных корней, это возможно лишь в случае $\deg P = 100$. Положим $P(x) = x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$. По теореме Виета для многочленов $P(x)$ и $P(x) - 1$ мы получаем, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = -a_{99} = y_1 + y_2 + \dots + y_{100}.$$

По условию $x_i - y_i = \pm 1$ при $i = 1, 2, \dots, 100$, значит, ровно для 50 пар в этом равенстве будет знак «+» и ровно для 50 будет знак «-». Обозначим через $R(x)$ унитарный многочлен степени 50, корнями которого будут 50 чисел x_i , для которых $x_i - y_i = 1$, через $S(x)$ — унитарный многочлен степени 50, корнями которого будут оставшиеся x_i , для которых $x_i - y_i = -1$. Тогда числа $y_1, \dots, y_{100}$ будут корнями многочлена $R(x+1)S(x-1)$, то есть $P(x) = R(x)S(x)$ и $P(x) - 1 = R(x+1)S(x-1)$, поэтому

$$R(x)S(x) - R(x+1)S(x-1) \equiv 1. \quad (\star)$$

Положим $T(x) = R(x+1) - S(x)$. Поскольку R и S — унитарные многочлены степени 50, то $d = \deg T \leq 49$. Кроме того,

$$T(x-1)S(x) - T(x)S(x-1) \equiv R(x)S(x) - S(x-1)S(x) - R(x+1)S(x-1) + S(x)S(x-1) \equiv 1.$$

В частности, многочлен $T(x)$ тождественно не равен нулю. Положим

$$T(x) = t_d x^d + t_{d-1} x^{d-1} + \dots + t_0, \quad t_d \neq 0; \quad S(x) = x^{50} + s_{49} x^{49} + \dots + s_0.$$

Тогда у многочлена $T(x)S(x-1)$ коэффициент при x^{50+d-1} равен $-50t_d + s_{49}t_d + t_{d-1}$, а у многочлена $S(x-1)T(x)$ получится $-dt_d + s_{49}t_d + t_{d-1}$. Эти коэффициенты отличаются на $(50-d)t_d \neq 0$, однако, в силу полученного выше соотношения, они должны быть одинаковы, противоречие.

Замечание. Прийти к противоречию, используя равенство $(*)$, можно несколько иначе. Приравнявая соответствующие коэффициенты, мы получим, что по данному многочлену $R(x)$ однозначно восстанавливаются коэффициенты $S(x)$, причём для этого достаточно условий на коэффициенты при степенях не младше 49-й. Однако, если в правой части заменить 1 на 0, то полученному равенству будет удовлетворять многочлен $R(x-1)$. Таким образом, именно его коэффициенты и будут восстановлены как коэффициенты многочлена $S(x)$, противоречие.

Замечание. Придумать пример многочлена степени 101 можно, например, из следующих соображений.

Рассуждения, аналогичные второй части решения, могут показать, что многочлен степени 101 может подойти под условие только в случае, когда все разности $x_i - y_i$ равны. Пусть $y_i = x_i - 1$ при всех i . Положим $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{100})$. Тогда $P(x) = Q(x)(x - a)$ и $P(x) - 1 = Q(x + 1)(x - b)$ при некоторых a и b ; приравнявая коэффициенты при x^{100} , получаем, что $b = a - 100$. Совершив замену переменных $y = x - a$ (и сдвигая соответственно все x_i), можно считать, что $P(x) = xQ(x)$ и $P(x) - 1 = (x - 100)Q(x + 1)$, то есть $xQ(x) = (x - 100)Q(x + 1) + 1$. Это равенство даёт систему линейных уравнений на коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Для подобных систем полезно бывает решить сначала *однородную* систему (в которой числа b в уравнениях вида $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ заменены на нулевые). Такая система задаст многочлен, удовлетворяющий равенству $xQ(x) = (x - 100)Q(x + 1)$; все такие многочлены находятся несложно — это $Q(x) = \alpha(x - 1)(x - 2) \dots (x - 100)$. Осталось понять, что для получения решения неоднородного уравнения достаточно изменить коэффициент при x^0 .