

11 класс

Второй день

- 11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i) , в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}) , если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

Ответ: не может.

Решение 1. Заметим, что если уравнение прямой, соединяющей точки (a_i, b_i) и (a_{i+1}, b_{i+1}) имеет вид $y = a_i x + c_i$, то $b_i = a_i^2 + c_i$ и $b_{i+1} = a_i a_{i+1} + c_i$. Вычтем одно равенство из другого:

$$b_i - b_{i+1} = a_i^2 - a_i a_{i+1}.$$

Пусть фишка побывала в точках $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_1, b_1)$. В силу сказанного выше, $b_i - b_{i+1} = a_i^2 - a_i a_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Здесь и далее считаем, что нумерация индексов ведётся по модулю n . Сложив все эти равенства, имеем:

$$0 = b_1 - b_{n+1} = \sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_i a_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2.$$

Следовательно, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, а тогда первая и вторая точка маршрута фишки совпадают, противоречие.

Решение 2. Назовем *ценой* точки плоскости (a, b) значение $a^2 - 2b$. После перемещения из точки (a_1, b_1) в точку (a_2, b_2) , где $b_1 - b_2 = a_1^2 - a_1 a_2$ и $a_1 \neq a_2$ цена новой точки будет больше, поскольку

$$a_2^2 - 2b_2 - (a_1^2 - 2b_1) = a_2^2 - a_1^2 + 2(a_1^2 - a_1 a_2) = (a_1 - a_2)^2 > 0.$$

Следовательно, в исходную точку фишка вернуться не может.

Замечание. У приведённого в условии процесса есть следующая интерпретация. Если паре чисел (a_1, b_1) сопоставить параболу Γ_{a_1, b_1} , задаваемую уравнением $y = x^2 + a_1 x + \frac{1}{2} b_1$, то парабола, соответствующая паре (a_2, b_2) , выбирается проходящей через вершину параболы Γ_{a_1, b_1} . В этом процессе никакая парабола не повторится, поскольку ордината вершины у каждой следующей меньше, чем у предыдущей.

- 11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k .

Ответ: $k = 1012$.

Решение. Для начала приведём *пример* для $k = 1012$. Пусть на доску выписаны числа

$$2^1, 2^2, \dots, 2^{2026}.$$

Рассмотрим одно из выписанных чисел $a = 2^n$. Если $m \in \{1, 2, \dots, 2026\}$, то в этом множестве найдётся число $k \neq m$ такое, что $m + k$ делится на n , возможно, за исключением случаев $m = n$ и $2m = n$. Действительно, если r — остаток от деления m на n , можно взять $k = m - r$. Пусть $k + n = Tm$. Тогда $2^n \cdot 2^k - 1 = 2^{Tm} - 1$, что делится на 2^{Tm-1} . Таким образом, для каждого выписанного числа a хотя бы 2024 выписанных числа участвуют хотя бы в одной искомой паре, поэтому таких пар не менее 1012.

Далее докажем *оценку*. Пусть a — наибольшее из чисел, выписанных на доске. Рассмотрим пары выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на a . Покажем, что

число a не участвует ни в одной из рассмотренных пар, а любое из оставшихся чисел — не более чем в одной такой паре, отсюда следует, что $2k \leq 2025$ и $k \leq 1012$.

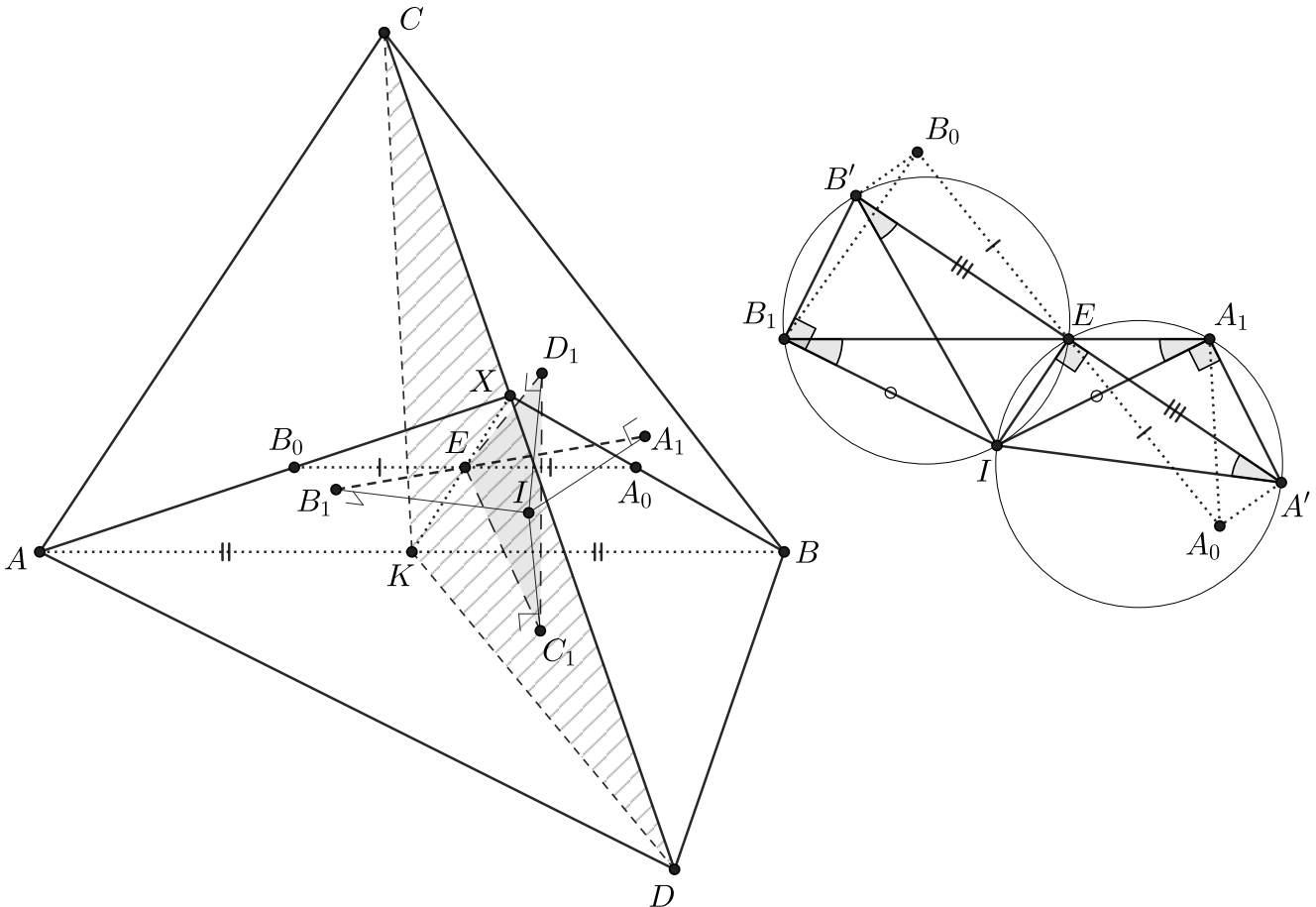
Пусть $an - 1$ делится на $a - 1$, где $1 < n < a$. Поскольку $a \equiv 1 \pmod{a-1}$, то $n - 1$ делится на $a - 1$, но $0 < n - 1 < a - 1$, противоречие. Теперь пусть числа $mk - 1$ и $mn - 1$ делятся на $a - 1$, где m, n, k — различные выписанные числа. Тогда число m взаимно просто с $a - 1$ и $mk - mn = m(k - n)$ кратно $a - 1$. Значит, $k - n$ делится на $a - 1$, однако $|k - n| \leq \max(k, n) - 2 < a - 1$, полученное противоречие завершает решение задачи.

- 11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD , CDA , DAB , ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E . Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE .

Решение 1. Проведем через точку E прямую, параллельную AB . Пусть она пересечет плоскости BCD и ACD в точках A_0 и B_0 соответственно. Тогда точки A, A_0, B, B_0 лежат в одной плоскости, поэтому лучи AB_0 и BA_0 пересекаются в некоторой точке X на ребре CD . Мы далее докажем, что E — середина A_0B_0 , а тогда, поскольку $AB \parallel A_0B_0$, то на прямой XE будет лежать середина отрезка AB , при этом по построению прямая XE содержится в плоскости CDE , то есть задача будет решена.

Поскольку $IC_1 \perp ABD$ и $ID_1 \perp ABC$, то плоскость ID_1C_1 перпендикулярна прямой AB , а тогда и прямой A_0B_0 . Следовательно, $IE \perp A_0B_0$. Далее можно рассматривать лишь точки I, A_1, B_1, A_0, B_0, E (см. рисунок справа).

Обозначим через A' и B' проекции точек A_0 и B_0 соответственно на плоскость IA_1B_1 . Тогда по теореме о трех перпендикулярах точки A', B', E лежат на одной прямой, перпендикулярной IE , а также $\angle B'B_1I = 90^\circ = \angle A'A_1I$. Значит, точки I, A_1, A', E лежат на окружности с диаметром $A'I$, а точки I, B_1, B', E — на окружности с диаметром $B'I$, поэтому $\angle IA'B' = \angle IA_1B_1 = \angle IB_1A_1 = \angle IB'A$ (здесь мы воспользовались равенством радиусов $IA_1 = IB_1$). Следовательно, $IA' = IB'$, а поскольку $IE \perp A'B'$, то и $A'E = B'E$. Тогда и $A_0E = B_0E$, что и требовалось.



Решение 2. Будем обозначать через $\text{dist}(T, XYZ)$ расстояние от точки T до плоскости XYZ , через $\angle(UV, XYZ)$ — угол между прямой UV и плоскостью XYZ .

Пусть плоскость CDE пересекает ребро AB в точке K . Тогда

$$\frac{AK}{BK} = \frac{\text{dist}(A, CDK)}{\text{dist}(B, CDK)} = \frac{V_{AECD}}{V_{BECD}} = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} \cdot \frac{\text{dist}(E, ACD)}{\text{dist}(E, BCD)} \quad (*).$$

Точки A_1 и B_1 как точки касания вписанной сферы с плоскостями BCD и ACD симметричны относительно биссектрисы двугранного угла при ребре CD , в силу этой симметрии прямая A_1B_1 образует равные углы с этими плоскостями. Следовательно,

$$\frac{\text{dist}(E, ACD)}{\text{dist}(E, BCD)} = \frac{B_1E}{A_1E} = \frac{\text{dist}(B_1, C_1D_1I)}{\text{dist}(A_1, C_1D_1I)} = \frac{V_{IB_1C_1D_1}}{V_{IA_1C_1D_1}} = \frac{\sin \angle(IB_1, IC_1D_1)}{\sin \angle(IA_1, IC_1D_1)}.$$

Прямые IC_1 и ID_1 перпендикулярны плоскостям ABD и ACD , поэтому они обе ортогональны прямой AB . Итого прямая AB перпендикулярна плоскости C_1D_1I , а прямая IA_1 — перпендикулярна плоскости BCD . Следовательно, $\angle(IA_1, IC_1D_1) = \angle(AB, BCD)$, аналогично $\angle(IB_1, IC_1D_1) = \angle(AB, ACD)$. Таким образом,

$$\frac{\text{dist}(E, ACD)}{\text{dist}(E, BCD)} = \frac{\sin \angle(AB, ACD)}{\sin \angle(AB, BCD)} = \frac{\text{dist}(B, ACD)}{\text{dist}(A, BCD)} \quad (**).$$

Поскольку

$$\text{dist}(B, ACD) \cdot S_{ACD} = 3 \cdot V_{ABCD} = \text{dist}(A, BCD) \cdot S_{BCD},$$

из соотношений $(*)$ и $(**)$ следует требуемое равенство $AK = BK$.

Замечание. Как нетрудно заметить, оба приведенных решения следует плану соответствующих рассуждений для аналогичной плоской задачи: если I — центр вписанной окружности треугольника ABC , которая касается соответствующих сторон в точках C_1, A_1, B_1 , и прямая IC_1 пересекает отрезок A_1B_1 в точке E , то прямая CE проходит через середину отрезка A_1B_1 . Отметим, что ключевое равенство второго решения

$$\frac{V_{IB_1C_1D_1}}{V_{IA_1C_1D_1}} = \frac{S_{BCD}}{S_{ACD}}$$

аналогично теореме синусов для треугольника. Действительно, если для трехгранного угла тетраэдра при вершине A мы обозначим через $\sin \angle A$ объем тетраэдра, образованного тремя внешними единичными нормальными в точке A к граням тетраэдра ABC, ABD, ACD (и введём аналогичные обозначения для остальных вершин), то наше равенство примет вид

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ACD}} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} \Leftrightarrow \frac{S_{BCD}}{\sin \angle A} = \frac{S_{ACD}}{\sin \angle B}.$$

Замечание. Приведём план альтернативного подхода с помощью полярного преобразования относительно вписанной сферы Ω .

Заметим, что точка A_1 — полюс плоскости BCD , аналогично и с другими точками касания. Следовательно, полюс плоскости IC_1D_1 — бесконечно удаленная точка на прямой AB , а полярная прямая A_1B_1 — это прямая CD . Таким образом, полюс P плоскости CDE лежит в плоскости α , параллельной прямой CD и содержащей ребро AB .

Рассмотрим плоскость γ , проходящую через точку C и перпендикулярную прямой CD . Пусть окружность ω — это проекция сферы Ω на γ , проекцию точки X на эту плоскость будем обозначать через X' . Тогда точка P' будет полюсом прямой CE' относительно окружности γ , а также $CP' \parallel AB$. После проектирования отрезки CA' и CB' будут касаться окружности ω (в точках B'_1 и A'_1).

Пусть прямая CE' пересекает окружность γ в точках U и V . В силу сказанного выше, точка P' лежит на пересечении касательных в точках U и V к окружности ω . Это означает, что четырехугольник $A'_1UB'_1V$ — гармонический, проецируя двойное отношение его вершин с описанной окружности на прямую $A'_1B'_1$ с центром в точке U , мы получаем, что четверка точек $P', B'_1, A'_1B'_1 \cap UV, A'_1$ — гармоническая. Теперь при проекции этой четверки с центром C на прямую $A'B'$, поскольку $CP' \parallel A'B'$ мы получаем, что CE' проходит через середину отрезка $A'B'$. Следовательно, середина отрезка AB лежит в плоскости CDE , что и требовалось.

- 11.8. Даны нечётные числа $a \leq b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α , при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.

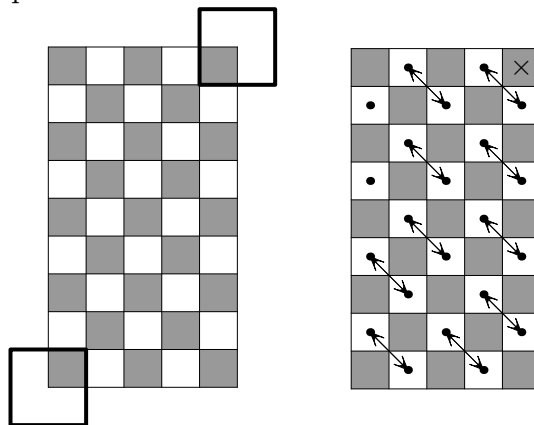
Ответ: $\frac{(a+1)(b-1)}{4(ab+b-a)}$.

Решение 1. Все рисунки в решении иллюстрируют сказанное при $a = 5, b = 9$.

Сперва докажем, что заявленное в ответе значение α (обозначим чего через α_0) удовлетворяет условию. В каждой салфетке правую верхнюю клетку назовём *базовой*. Непокрытую клетку назовём *дыркой*.

Рассмотрим произвольную салфетку; введём систему координат (пронумеруем строки и столбцы) так, что её базовая клетка имеет координаты $(1, 1)$. Согласно условию задачи, при параллельном переносе T на вектор (a, b) конфигурация переходит в себя. Тогда клетка (a, b) покрыта нижней левой клеткой T -образа этой салфетки.

Рассмотрим прямоугольник P с левой нижней клеткой $(1, 1)$ и правой верхней клеткой (a, b) . Раскрасим его клетки в шахматном порядке так, чтобы все угловые клетки были черными (это возможно, поскольку a и b нечётны); чёрных клеток окажется на одну больше, чем белых. Нетрудно видеть, что каждая салфетка покрывает в P не меньше чёрных клеток, чем белых. При этом рассмотренная выше салфетка и её образ покрывают больше чёрных клеток, чем белых. Поскольку каждая клетка покрыта не более чем по одному разу, какая-то белая клетка в этом прямоугольнике — дырка. Сопоставим одну из таких дырок рассмотренной салфетке.



Выясним, скольким салфеткам может быть сопоставлена одна и та же дырка. Введём координаты иначе, чтобы у дырки они были (a, b) . Тогда базовые клетки салфеток, которым она соответствует — по-прежнему белые клетки прямоугольника P (в новых координатах). При этом все эти белые клетки, кроме $\frac{b-a}{2}$ верхних клеток левого столбца, можно разбить на пары соседних по диагонали (левая верхняя—правая нижняя); из каждой такой пары не более чем одна клетка может быть базовой. Таким образом, базовых клеток (и,

тем самым, сопоставленных салфеток) не больше, чем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ab-1}{2} + \frac{b-a}{2} \right) = \frac{1}{4}(a+1)(b-1).$$

Предположим, что для некоторого натурального N наименьшее количество салфеток в квадрате $N \times N$ равно αN^2 . Тогда в любом квадрате $M \times M$, где $M = s \cdot N$, содержится не менее, чем αM^2 салфеток, поскольку он разбивается на s^2 квадратов $N \times N$.

Пусть квадрат $M \times M$ содержит целиком k салфеток. Все эти k салфеток и не менее чем $\frac{4k}{(a+1)(b-1)}$ соответствующих им дырок содержатся в прямоугольнике $(M+a) \times (M+b)$, у которого общий левый нижний угол с рассмотренным ранее квадратом. Значит, сумма площадей этих салфеток и дырок не больше площади прямоугольника:

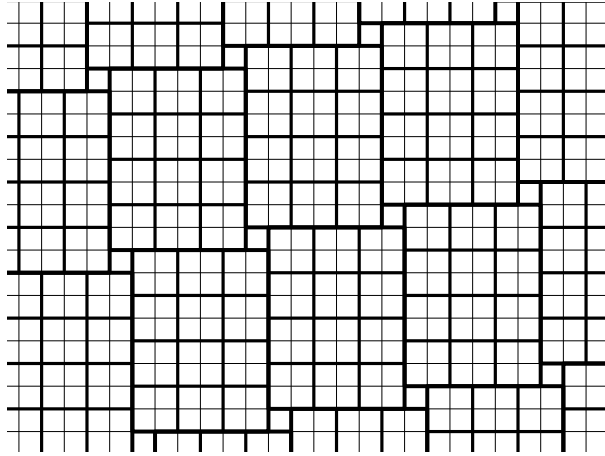
$$k \left(4 + \frac{4}{(a+1)(b-1)} \right) \leq (M+a)(M+b).$$

Итого

$$\alpha \leq \frac{k}{M^2} \leq \frac{(a+1)(b-1)}{4(ab+b-a)} \cdot \frac{(M+a)(M+b)}{M^2}. \quad (\star)$$

Воспользуемся тем, что $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(sN+a)(sN+b)}{(sN)^2} = 1$ (напомним, что $M = s \cdot N$) и перейдём к пределу в неравенстве $(\star)$ — получится, что $\alpha \leq \alpha_0$. Значит, действительно для любого N найдётся квадрат $N \times N$, в котором покрыто не более, чем $\alpha_0 N^2$ клеток.

Осталось доказать, что никакое значение $\alpha < \alpha_0$ под условие не подходит. Рассмотрим прямоугольник Π с горизонтальной стороной $a+1$ и вертикальной стороной $b-1$. Разобьём его на квадратики 2×2 (салфетки) и добавим все его сдвиги на все целые кратные векторов (a, b) и $(-1, b-1)$ (и их суммы). Сопоставим каждой дырке прямоугольник, с которым она граничит своей нижней стороной, это сопоставление взаимно-однозначно.



Предположим, что квадрат $N \times N$ содержит не более, чем αN^2 салфеток. Значит, он целиком содержит не более, чем $\frac{4\alpha N^2}{(a+1)(b-1)}$ сдвигов прямоугольника Π . Тогда в этом квадрате дырок не больше, чем $\frac{4\alpha N^2}{(a+1)(b-1)} + 4(a+b) \cdot N$. Действительно, каждой дырке, не лежащих в крайних $a+b$ столбцах (с любой из 4 сторон) соответствует целиком содержащийся в квадрате прямоугольник $(a+1) \times (b-1)$, разбитый на салфетки, а число оставшихся клеток можно оценить как $C \cdot N$ для $C = 4(a+b)$. Салфетки, целиком содержащиеся в квадрате, и дырки в нём по площади должны составлять не менее $(N-2)^2$ (клетки крайних строк и столбцов могут быть покрыты салфетками, не содержащимися в квадрате полностью), откуда

$$4\alpha N^2 + \frac{4\alpha N^2}{(a+1)(b-1)} + C \cdot N \geq (N-2)^2 \Rightarrow 4\alpha + \frac{4\alpha}{(a+1)(b-1)} + \frac{C}{N} \geq \frac{(N-2)^2}{N^2}.$$

Эта оценка должна выполняться при каждом натуральном N . Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в правом неравенстве мы получаем, что

$$4\alpha + \frac{4\alpha}{(a+1)(b-1)} \geq 1 \Rightarrow \alpha \geq \frac{(a+1)(b-1)}{4(ab+b-a)} = \alpha_0,$$

что и требовалось доказать.

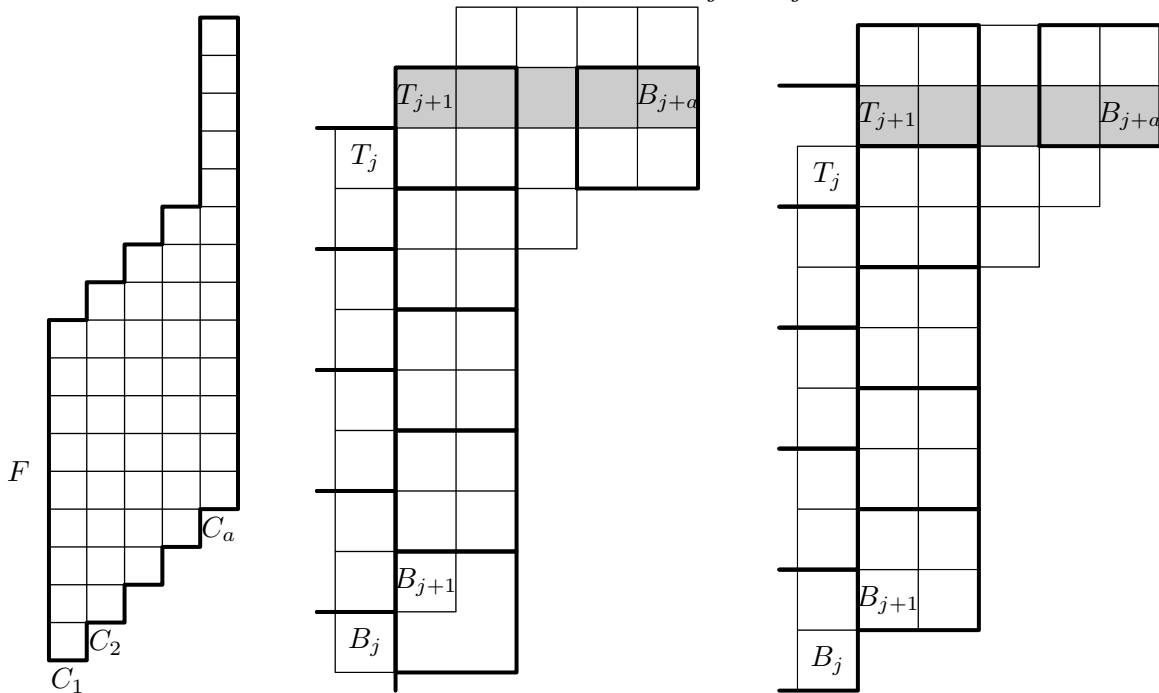
Решение 2. Приведём другое доказательство того, что $\alpha = \alpha_0$ удовлетворяет требованиям. Мы будем пользоваться терминологией из первого решения. Введём систему координат на плоскости.

Рассмотрим фигуру F , содержащую при каждом $i = 1, 2, \dots, a-1$ столбец C_i от клетки (i, i) до клетки $(i, i+b-1)$, а также столбец клеток C_a от (a, a) до $(a, 2b-1)$; всего эта фигура содержит $(a-1)b + (2b-a) = ab + b - a$ клеток.

Лемма. Любой параллельный перенос этой фигуры (на вектор с целыми координатами) содержит дырку.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать утверждение леммы для исходной фигуры F .

Предположим противное. Назовём салфетку *чётной* или *нечётной* в зависимости от того, чётна или нечётна ордината её базовой клетки. Обозначим через C_{i+a} столбец, полученный из C_i переносом на вектор $\vec{v} = (a, b)$ (в частности, C_{2a+1} получен из C_1 переносом на $2\vec{v}$); по условию, все столбцы C_i , $i = 1, 2, \dots$, также полностью покрыты. Значит, для каждого i все салфетки, задевающие C_i , имеют одинаковую чётность; в зависимости от неё назовём этот столбец *чётным* или *нечётным*. Заметим, что столбцы C_1 и C_{a+1} имеют разные чётности, так как их покрытия отличаются сдвигом на (a, b) ; поэтому существует такое j ($1 \leq j \leq a$), что C_j и C_{j+1} имеют разную чётность. Выберем одно такое j . Заметим, что тогда одна салфетка не может задевать и C_j , и C_{j+1} .



Предположим, что C_j имеет ту же чётность, что и j (а тогда C_{j+1} и C_{j+a} имеют ту же чётность, что и $j+1$). Пусть $T_j = (j, k)$ — верхняя клетка в C_j ; тогда он содержит и клетку $B_j = (j, k-b+1)$, а тогда C_{j+a} содержит клетку $B_{j+a} = (j+a, k+1)$. Кроме того, C_{j+1} содержит клетки $B_{j+1} = (j+1, k-b+2)$ и $T_{j+1} = (j+1, k+1)$. Заметим, что числа k и j имеют одинаковую чётность. Мы докажем, что строка R между клетками T_{j+1} и B_{j+a} , содержит дырку. Это даст требуемое противоречие, ибо эта строка полностью содержится в объединении столбцов $C_{j+1}, \dots, C_{j+a}$.

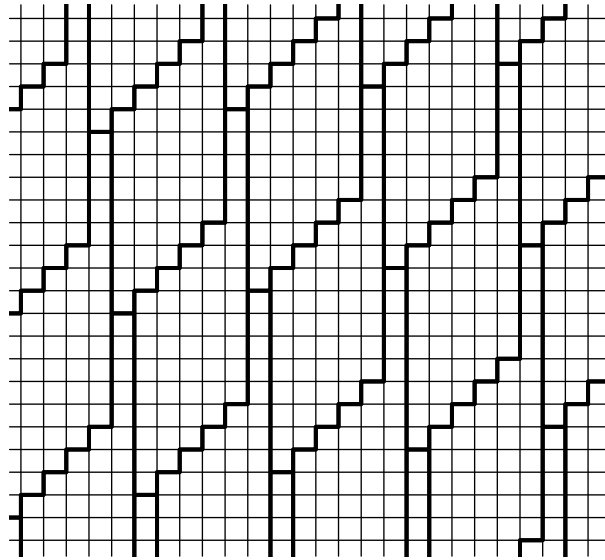
Действительно, чётность салфетки, накрывающей T_{j+1} , совпадает с чётностью числа $k+1$, то есть ордината её базовой клетки равна $k+1$. Тогда её абсцисса равна $j+2$, иначе она

бы накрывала T_j , то есть задевала бы и C_j , и C_{j+1} . Таким образом, левые две клетки в R накрыты одной салфеткой. Аналогично, базовая клетка салфетки, накрывающей B_{j+1} , имеет координаты $(j+2, k-b+2)$, то есть она накрывает и клетку под B_{j+1} . Значит, её не накрывает салфетка, накрывающая B_j , то есть эта салфетка имеет базовую клетку B_j . Поэтому и B_{j+a} является базовой клеткой некоторой салфетки, накрывающей правые две клетки в R . Но тогда строка R , состоящая из нечётного числа клеток, не может быть полностью покрыта салфетками.

Если C_j имеет ту же чётность, что и $j+1$ (а C_{j+1} — ту же чётность, что и j), рассуждения аналогичны. Вводя те же клетки, мы получаем, что базовая клетка салфетки, накрывающей T_j , имеет координаты $(j, k+1)$, поэтому базовая клетка салфетки, накрывающей T_{j+1} , имеет координаты $(j+2, k+2)$, и эта салфетка покрывает левые две клетки строки R . С другой стороны, базовая клетка салфетки, накрывающей B_j , имеет координаты $(j, k-b+2)$, а тогда её перенос на $\vec{v}$ накрывает правые две клетки в R . Лемма доказана. $\square$

Теперь несложно завершить оценку. Заметим, что вся плоскость разбивается на сдвиги фигуры F на векторы, кратные (a, b) и $(-1, b-1)$. Рассмотрим любой квадрат $M \times M$. Каждая его клетка, отстоящая от границы квадрата хотя бы на $a+b$, покрыта одним из этих сдвигов, целиком содержащимся в квадрате. Значит, сдвигов из разбиения, целиком содержащихся в квадрате, не меньше, чем $\frac{(M-2a-2b)^2}{ab+b-a}$, и каждый содержит дырку. Поэтому количество салфеток, полностью содержащихся в квадрате, не превосходит

$$\frac{1}{4} \left(M^2 - \frac{(M-2a-2b)^2}{ab+b-a} \right).$$



Теперь для любого натурального N выберем наименьшее α такое, что некоторый квадрат $N \times N$ содержит αN^2 салфеток. Тогда в любом квадрате $M \times M$ при $M = s \cdot N$ содержится не менее αM^2 салфеток, то есть

$$\alpha \leq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(M-2a-2b)^2}{M^2(ab+b-a)} \right).$$

Переходя к пределу при $s \rightarrow \infty$, получаем $\alpha \leq \alpha_0$.