

9 класс

Первый день

- 9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k ? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

Ответ: 25.

Решение. *Стратегия Пети.* Покажем, как действовать Пете, чтобы в итоге количества конфет отличались не больше, чем на 25, как бы ни ходил Вася. Пусть на первом ходе Петя возьмёт 25 конфет, а затем на каждом ходе будет брать по одной конфете. Если после первого хода он возьмёт ещё x конфет, то он (а значит, и Вася) сделает ещё x ходов. Поэтому количество y конфет у Васи будет не меньше, чем x , при этом $x + y = 50$. Количества конфет у мальчиков будут отличаться на $|25 + x - y|$; при этом $0 \leq y - x \leq y + x = 50$, то есть $-25 \leq 25 + x - y \leq 25$, или $|25 + x - y| \leq 25$, что и требовалось.

Стратегия Васи. Покажем, как действовать Васе, чтобы количества конфет у мальчиков отличались не меньше, чем на 25, как бы ни ходил Петя. Пусть Петя первым ходом взял x конфет. Если $x \leq 25$, то Васе достаточно сразу же забрать все оставшиеся конфеты — количества будут различаться на $(75 - x) - x = 75 - 2x \geq 25$. Если же $x > 25$, Вася будет брать каждым своим ходом по одной конфете. Тогда, если у Васи окажется y конфет, то Петя сделает (после первого) ещё хотя бы $y - 1$ ход, то есть у него окажется не менее $x + (y - 1)$ конфет. Значит, разность их количеств будет не меньше $(x + y - 1) - y = x - 1 \geq 25$, что и требовалось.

- 9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a, b, c, d и e , большие 1, что $n = a^a = b^b = d^d$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^{y^z} означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y^z .)

Ответ: Бесконечно.

Решение. Если число a чётно, то a^a кратно четырём и, значит, число a^a представляет собой четвёртую степень некоторого натурального числа. Тогда его можно представить и в виде d^{e^e} для $e = 2$ и подходящего d .

Положим $a = b^b$ для чётного $b > 2$. Тогда $a \geq 16$, $a^a = (b^b)^a = b^{ab}$ и $a^{a^a} = (b^b)^{b^{ab}} = b^{b \cdot b^{ab}} = b^{b^{ab+1}}$. Следовательно, при $c = ab + 1$ будет выполнено равенство $a^{a^a} = b^{b^c}$. Осталось понять, что в этом случае числа a, b, c, d и e будут различными. По построению $c > a > b > 2 = e$. Поскольку $d^4 = a^a \geq a^{16}$, число d будет больше, чем $a^2 > ab + 1 = c$.

Таким образом, для любого чётного $b > 2$ число $n = a^{a^a}$ при $a = b^b$ будет странным. Поэтому странных чисел бесконечно много.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно положить $a = b^b$ для произвольного (не обязательно чётного) b , имеющего вид $b = e^e$ при $e > 1$. Также существуют конструкции, когда $a = b^{b^2}$ и т. п.

- 9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y , которая касается вписанной и одной из внеписанных окружностей треугольника ABC .

Решение. Обозначим через ω вписанную окружность треугольника ABC , а через ω_a его внеписанную окружность, касающуюся стороны BC . Покажем, что существует окружность, которая проходит через точки X и Y и касается ω и ω_a . Обозначим через P и Q ближайшие друг к другу точки пересечения биссектрисы угла A с окружностями ω и ω_a

Решение. Рассмотрим граф G , в котором вершины соответствуют участникам, а рёбра соединяют пары друзей. Тогда нам известно, что вершины можно окрасить в n цветов так, что в каждом простом цикле не более половины вершин будут одноцветными (назовём такую окраску *приятной*). Нужно же доказать, что можно вершины окрасить в n цветов правильным образом.

Назовём цвет *правильным*, если никакие две вершины этого цвета не соединены; иначе назовём его *неправильным*. Рассмотрим любую приятную окраску вершин и два цвета A и B в ней. Мы докажем, что можно перекрасить вершины этих цветов (окрасив каждую снова либо в A , либо в B) так, что оба этих цвета станут правильными, и раскраска останется приятной. Заметим, что при такой операции любой другой правильный цвет останется правильным. Значит, проделав такую операцию несколько раз, задействовав каждый цвет хотя бы по разу, мы получим правильную окраску вершин, что и требовалось.

Осталось показать, как совершить перекраску для двух цветов. Рассмотрим лишь граф H на вершинах цветов A и B (со всеми рёбрами, соединяющими пары этих вершин). Если в H есть простой цикл, то в нём не больше половины вершин цвета A и не больше половины — цвета B , то есть вершин обоих цветов в нём ровно по половине. Следовательно, этот цикл чётный. Таким образом, в графе H нет нечётных циклов; как известно, вершины такого графа можно правильно окрасить в два цвета.

Сделаем такую окраску в цвета A и B ; оба этих цвета стали правильными. Осталось доказать, что в любом простом цикле в исходном графе G по-прежнему не более половины вершин одного цвета. Это условие могло нарушиться лишь для цветов A или B ; покажем, что оно не нарушилось, скажем, для цвета A . Сопоставим каждой вершине цикла, имеющей цвет A , следующую за ней по циклу. Сопоставленные вершины будут иметь цвета, отличные от A , и все они будут различными. Значит, вершин цвета A в цикле столько же, сколько сопоставленных им вершин других цветов, то есть не больше половины общего числа вершин в цикле, что и требовалось.

Замечание. Рассуждение из последнего абзаца решения показывает, что если вершины окрашены правильным образом, то в любом простом цикле не более половины одноцветных вершин. Таким образом, существование правильной раскраски *равносильно* существованию раскраски из условия.