

9 класс

Второй день

- 9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \dots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.

Решение. Рассмотрим две катушки K_1 и K_2 , на которых изначально было соответственно $(2k-1)^2$ и $(2k)^2$ дм ленты, где $k = 1, \dots, n$. Если ленту с этих катушек всегда отрезали одновременно, то с K_2 было срезано $(2k-1)^2$ дм, и длина оставшейся на ней ленты равна $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1$ дм.

Если это не так, то рассмотрим самый первый момент, когда совершалась операция лишь с одной из этих двух катушек. Так как до этого момента ленту с этих катушек отрезали одновременно, то разница между их длинами до этой операции равна изначально: K_2 содержит на $4k - 1$ дм ленты больше, чем на K_1 . Поэтому в наш момент Катя не может отрезать ленту только с K_1 , то есть она должна отрезать ленту только с K_2 , причём больше, чем осталось на K_1 . Значит, после отрезания длина оставшейся на K_2 ленты станет меньше изначальной разности длин лент на этих катушках, то есть меньше $4k - 1$ дм. При дальнейших же операциях длина ленты на K_2 увеличиваться не будет, то есть и в конце она не будет превосходить $4k - 1$ дм.

Итак, в любом случае на K_2 останется не более $4k - 1 \leq 4n - 1$ дм ленты, что и требовалось.

- 9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O . Окружность с центром T , проходящая через точки P и Q , касается отрезка BC . Докажите, что $TO \parallel BC$.

Решение 1. Заметим, что существует две окружности, проходящие через точки P и Q и касающиеся *прямой* BC ; при этом точки их касания с BC лежат по разные стороны от прямой PQ . Поскольку эта прямая не пересекает отрезка BC , максимум одна из этих окружностей касается *отрезка* BC . Значит, окружность с центром T из условия определена однозначно; покажем, как построить её другим способом.

Пусть AN — высота в треугольнике ABC . Четырёхугольники $APNB$, $AQNC$ и $APQQ$ вписаны в окружности с диаметрами AB , AC и AO соответственно, поэтому

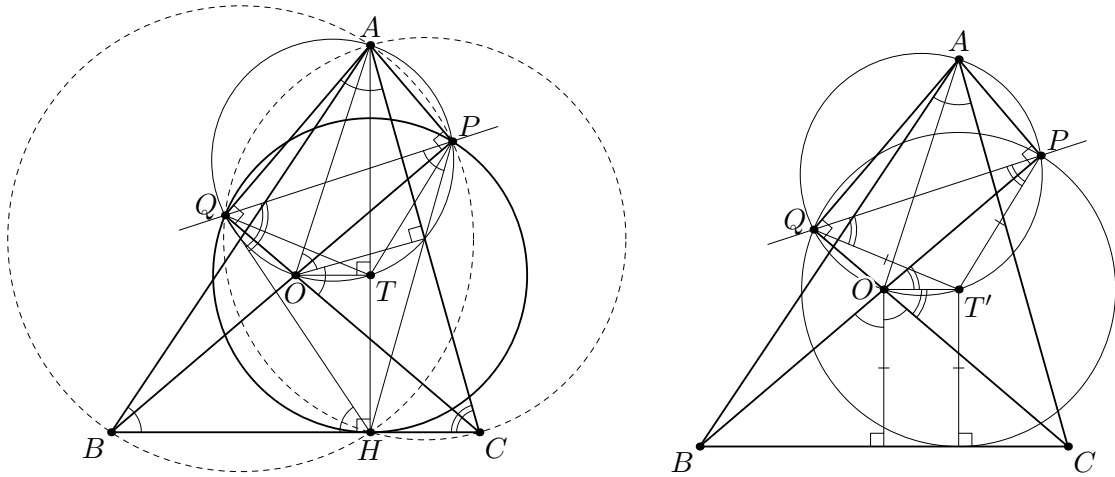
$$\angle HPQ = \angle HPA - \angle APQ = \angle HPA - \angle AOQ = (180^\circ - \angle ABC) - (180^\circ - 2\angle ABC) = \angle ABC;$$

аналогично, $\angle QPH = \angle ACB$. Кроме того,

$$\angle QNB = \angle QAC = 90^\circ - \angle ACQ = \angle ABC = \angle HPQ,$$

то есть описанная окружность треугольника PQH касается отрезка BC . Значит, она и является окружностью из условия.

Поскольку эта окружность касается BC , её центр T лежит на высоте AN . Теперь имеем $\angle PTQ = 2\angle PHQ = 2(180^\circ - \angle PQH - \angle QPH) = 2(180^\circ - \angle ACB - \angle ABC) = 2\angle BAC = \angle POQ$. Значит, точка T лежит на одной окружности с точками P , O и Q , то есть на окружности с диаметром AO , и потому $OT \perp AT$. Поскольку $BC \perp AT$, отсюда и следует, что $BC \parallel OT$.



Решение 2. Обозначим через R радиус описанной окружности треугольника ABC . Заметим опять же, что точки P и Q лежат на окружности ω с диаметром OA . Пусть T' — середина дуги POQ этой окружности. Тогда OT' — внешняя биссектриса угла POQ , а значит, и угла BOC . Поскольку $BO = OC$, эта биссектриса параллельна BC , то есть расстояния от O и T' до прямой BC равны, и оба равны $R \cos BAC$. С другой стороны, по теореме синусов имеем $T'P = T'Q = R \sin T'PQ = R \cos(PT'Q/2) = R \cos(POQ/2) = R \cos BAC$, поэтому окружность γ с центром T' и радиусом $R \cos BAC$ проходит через P и Q и касается BC .

Пусть, не умаляя общности, $AB > AC$. Тогда $OP > OQ$, следовательно, луч PQ пересекается с лучом CB , а точка T' ближе к точке C , чем к точке B , поэтому окружность γ будет касаться луча BC . Как и в начале первого решения, можно получить, что такая окружность единственна, а значит, точка T' совпадает с T . При этом, как мы уже видели выше, $OT \parallel BC$.

9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. Расстоянием между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n . Докажите, что $\sqrt{R} + \sqrt{B} \leq n$.

Решение. Занумеруем строки сверху вниз, а столбцы слева направо числами от 1 до n ; каждую клетку будем обозначать как (r, c) , где r — номер её строки, а c — номер её столбца. Запишем в каждую клетку (r, c) остатки u и v от деления чисел $r + c$ и $r - c$ на n .

Предположим, что в клетках (r_1, c_1) и (r_2, c_2) записана одна и та же (упорядоченная) пара остатков. Это значит, что $r_1 + c_1 \equiv r_2 + c_2 \pmod{n}$ и $r_1 - c_1 \equiv r_2 - c_2 \pmod{n}$. Складывая и вычитая эти два сравнения, получаем $2r_1 \equiv 2r_2 \pmod{n}$ и $2c_1 \equiv 2c_2 \pmod{n}$, а поскольку n нечётно, то $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$ и $c_1 \equiv c_2 \pmod{n}$, то есть $r_1 = c_1$ и $r_2 = c_2$. Значит, в любых двух различных клетках написаны разные пары остатков.

Покажем теперь, что если в красной клетке (r_r, c_r) написаны остатки u_r, v_r , а в синей клетке (r_b, c_b) — остатки u_b, v_b , то $u_r \neq u_b$ и $v_r \neq v_b$. Предположим, что $u_r = u_b$. Числа $r_r + c_r$ и $r_b + c_b$ отличаются меньше, чем на $2n$; поскольку они дают одинаковые остатки при делении на n , они либо равны, либо отличаются на n . В первом случае прямая, соединяющая центры этих клеток, параллельна диагонали таблицы, что невозможно по условию. Во втором же, если, скажем, $r_r + c_r = r_b + c_b + n$, то $(r_r - r_b) + (c_r - c_b) = n$. Оба слагаемых меньше n , поэтому оба они положительны. Тогда это равенство означает, что расстояние между нашими клетками равно n , что также запрещено условием. Случай $v_r = v_b$ разбирается аналогично.

Пусть в красных клетках встречаются k остатков на первых местах и ℓ остатков на вторых; поскольку каждая пара остатков задаёт клетку однозначно, получаем

$$R \leq k\ell \leq \left(\frac{k+\ell}{2}\right)^2.$$

По доказанному, в синих клетках на первых местах могут встречаться лишь $n - k$ других остатков, а на вторых — лишь $n - \ell$ других остатков, то есть

$$B \leq (n - k)(n - \ell) \leq \left(\frac{(n - k) + (n - \ell)}{2}\right)^2 = \left(n - \frac{k + \ell}{2}\right)^2.$$

Значит,

$$\sqrt{R} + \sqrt{B} \leq \frac{k + \ell}{2} + \left(n - \frac{k + \ell}{2}\right) = n,$$

что и требовалось доказать.

- 9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a , b и c . Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

Решение 1. Предположим, что все три числа $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ являются полными квадратами. Пусть, не умаляя общности, $a < b < c$. При этом, по неравенству треугольника, $a + b > c$. Заметим, что числа $(ca + 1)(cb + 1)$ и $c^2(ab + 1)$ являются полными квадратами, то есть $(ca + 1)(cb + 1) = x^2$ и $c^2(ab + 1) = y^2$ для некоторых натуральных x и y . Разность $d = x^2 - y^2$ равна $c(a + b - c) + 1$. Видим, что $d > 0$, а тогда $x \geq y + 1$. Значит, $d \geq (y + 1)^2 - y^2 = 2y + 1 = 2c\sqrt{ab + 1} + 1$. Но тогда имеем

$$d \geq 2c\sqrt{ab + 1} + 1 > 2ac + 1 > ac + 1 > c(a + b - c) + 1 = d,$$

то есть $d > d$. Противоречие.

Решение 2. Не умаляя общности, можно считать, что c — наибольшее из чисел. Предположим противное: пусть $ab + 1 = z^2$, $ac + 1 = y^2$, $bc + 1 = x^2$, где x , y , z — натуральные числа. Тогда $x^2 < c^2 + 1$, откуда $x \leq c$. Аналогично, $y \leq c$. С другой стороны, $(x + y)^2 > x^2 + y^2 > c(a + b) > c^2$ (здесь мы воспользовались неравенством треугольника). Значит, $x + y > c$. Отсюда следует, что $x + y > c \geq \max(x, y) > |x - y|$.

Заметим, что $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = abc^2 = (z^2 - 1)c^2$. Преобразуя это равенство, получаем

$$(zc)^2 - c^2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) = (xy + 1)^2 - (x + y)^2 = (xy - 1)^2 - (x - y)^2.$$

Выше мы получили, что $x + y > c > |x - y|$. Тогда из полученных равенств следует, что $xy + 1 > zc > xy - 1$, а такое возможно только если $zc = xy$. Но, так как $x^2 = bc + 1$, числа x и c взаимно просты, и аналогично y взаимно просто с c . Но xy кратно c , откуда $c = 1$. Это невозможно, поскольку c — максимальное из трёх различных натуральных чисел.