

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + 2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots$ удовлетворяет равенству

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} = a_n^2$$

при всех натуральных n . Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

10.3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а его высоты пересекаются в точке H . Касательные к окружности (BHC) в точке B , к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1 . Касательные к окружности (BHC) в точке C , к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2 . Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.

(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ .)

10.4. Даны натуральные числа m и k , причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m - 1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k . Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?