

11 класс

Первый день

- 11.1. Можно ли 2026 чисел $1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, \dots, 1 + 2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?
- 11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M . На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK = KN = NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H . Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков $АН$, $ВН$ и $СН$, касается описанной окружности треугольника MKN .
- 11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из $n > 1$ регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.
- 11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \dots, y_{100}$ у многочлена $P(x) - 1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \dots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n ?