

11 класс

Второй день

- 11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i) , в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}) , если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?
- 11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k .
- 11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD , CDA , DAB , ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E . Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE .
- 11.8. Даны нечётные числа $a \leq b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α , при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.