

9 класс

Первый день

- 9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k ? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)
- 9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a , b , c , d и e , большие 1, что $n = a^a = b^b = c^c$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^y означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y .)
- 9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y , которая касается вписанной и одной из невписанных окружностей треугольника ABC .
- 9.4. На олимпиаду приехало несколько участников из $n > 1$ регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.