

9 класс

Второй день

- 9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \dots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.
- 9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O . Окружность с центром T , проходящая через точки P и Q , касается отрезка BC . Докажите, что $TO \parallel BC$.
- 9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. Расстоянием между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n . Докажите, что $\sqrt{R} + \sqrt{B} \leq n$.
- 9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a , b и c . Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.