

LIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Экспериментальный тур

Возможные решения

Задача №10-Е1. Тёмное пятно

Поверхность дна сосуда является матовой, поэтому луч лазера, попадающий на неё, рассеивается во все стороны. Лучи, попадающие изнутри на границу жидкости и воздуха под углами, превышающими предельный угол $\alpha_{\text{кр}}$, отражаются обратно и снова попадают на матовую поверхность дна сосуда, подсвечивая её. В свою очередь, лучи, попадающие на границу жидкость-воздух под углами, меньшими $\alpha_{\text{кр}}$, преломляются и выходят из жидкости. Справедливости ради стоит отметить, что и для углов падения, меньших $\alpha_{\text{кр}}$, небольшая часть света отражается обратно, поэтому тёмный круг на дне сосуда несколько подсвечен (см. фото 1 из условия) и не является полностью чёрным.

Найдём диаметр тёмного пятна, для чего построим луч, который после рассеяния света от лазера на дне сосуда падает на границу жидкость-воздух под углом $\alpha_{\text{кр}}$ (см. рис. 1). Из треугольников, показанных на рисунке, следует, что

$$\frac{D}{2} = 2 \cdot h \operatorname{tg} \alpha_{\text{кр}}.$$

Поскольку предельный угол, при котором на границе жидкости с воздухом происходит полное внутреннее отражение, определяется формулой $\sin \alpha_{\text{кр}} = 1/n_{\text{ж}}$,

выражение для диаметра тёмного пятна будет иметь вид

$$D = \frac{4h}{\sqrt{n_{\text{ж}}^2 - 1}}.$$

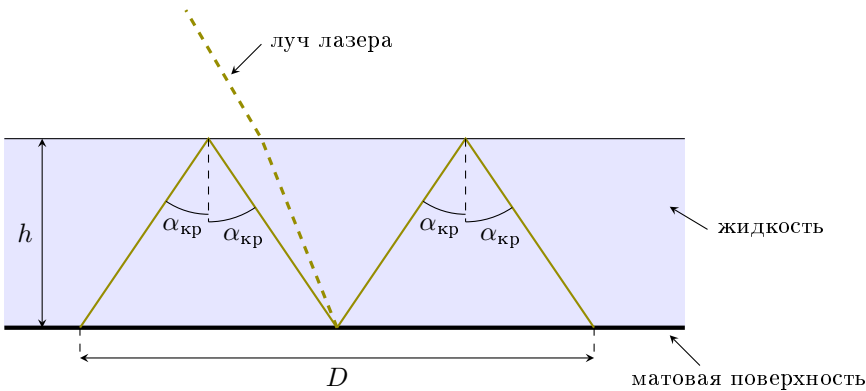


Рис. 1

Поместим в сосуд линейку и, включив лазер, начнём с помощью шприца наливать внутрь воду. Занесём в таблицу результаты измерений.

V , мл	50	65	80	95	110	125	140
D , мм	24	33	42	50	59	68	77

Выльем воду и вытрем дно сосуда и линейку салфеткой. Повторим описанный выше эксперимент с неизвестной жидкостью.

V , мм	50	65	80	95	110	125	140
D , мм	22	30	39	47	55	64	72

На дне сосуда № 1 есть плоская площадка, поэтому теоретическая зависимость диаметра пятна D от объёма жидкости V должна иметь вид линейной функции

$$D(V) = \frac{4(V - V_0)}{S\sqrt{n_{\text{ж}}^2 - 1}},$$

где S — площадь дна сосуда, V_0 — константа, связанная с объёмом пустого места вокруг площадки и объёмом линейки. Отметим на координатной плоскости

точки, полученные в пп. 1.2 и 1.3, и для каждой серии точек проведём аппроксимирующую прямую (рис. 2). Поскольку значение S неизвестно, будем искать отношение угловых коэффициентов построенных прямых

$$\gamma = \frac{k_{\text{в}}}{k_{\text{нж}}} = \frac{77,0 - 24,0}{72,0 - 22,0} = 1,06.$$

С другой стороны,

$$\gamma = \sqrt{\frac{n_{\text{нж}}^2 - 1}{n_{\text{в}}^2 - 1}} \quad \Rightarrow \quad n_{\text{нж}} = \sqrt{1 + \gamma^2(n_{\text{в}}^2 - 1)} = 1,37.$$

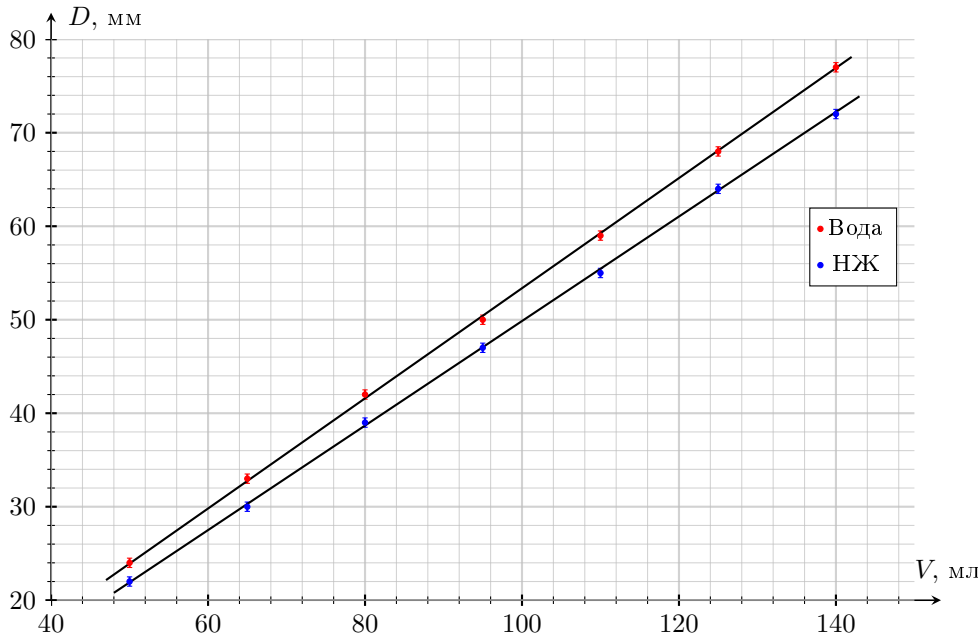


Рис. 2

Оценим погрешность полученного результата:

$$\Delta n_{\text{нж}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n_{\text{в}}^2 - 1)\Delta(\gamma^2) + \gamma^2\Delta(n_{\text{в}}^2)}{n_{\text{нж}}} = \frac{(n_{\text{в}}^2 - 1)\gamma}{n_{\text{нж}}} \cdot \Delta\gamma + \frac{\gamma^2 n_{\text{в}}}{n_{\text{нж}}} \cdot \Delta n_{\text{в}}.$$

Подставляя найденные значения и данные из условия, получим, что второе слагаемое равно 0,001, а первое — $0,6\Delta\gamma$. Для нахождения $\Delta\gamma$ применим метод границ,

считая, что возможное отклонение координат крайних точек составляет 0,5 мм (половину деления координатной сетки):

$$\gamma_{\max} = \frac{77,5 - 23,5}{71,5 - 22,5} \approx 1,10, \quad \gamma_{\min} = \frac{76,5 - 24,5}{72,5 - 21,5} \approx 1,02 \quad \Rightarrow \quad \Delta\gamma \approx 0,04.$$

Отсюда видно, что второе слагаемое не существенно, и $\Delta n_{\text{нж}} = 0,03$.

Возьмём сосуд № 2 и, включив лазер, измерим диаметр пятна. Получим, что $D_0 = 34$ мм.

В данной системе есть две границы (акриловая пластина-жидкость и жидкость-воздух), на которых возможно полное внутреннее отражение. Рассмотрим сначала первый случай — луч падает на границу жидкость-воздух под предельным углом α_1 — и найдём расстояние $D_1/2$ (см. рис. 3):

$$D_1/2 = 2d \operatorname{tg} \beta_1 + 2h \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Перепишем это выражение, учитывая, что

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{n_{\text{ж}}}, \quad \sin \beta_1 = \frac{n_{\text{ж}} \sin \alpha_1}{n_{\text{пл}}} = \frac{1}{n_{\text{пл}}},$$

и получим

$$D_1 = \frac{4d}{\sqrt{n_{\text{пл}}^2 - 1}} + \frac{4h}{\sqrt{n_{\text{ж}}^2 - 1}}. \quad (*)$$

Во втором случае, когда луч испытывает полное отражение от границы акрил-жидкость, расстояние $D_2/2$ равно

$$D_2/2 = 2d \operatorname{tg} \alpha_2, \quad \text{где } \sin \alpha_2 = n_{\text{ж}}/n_{\text{пл}}.$$

Откуда, подставляя выражение для угла, получим

$$D_2 = \frac{4d}{\sqrt{(n_{\text{пл}}/n_{\text{ж}})^2 - 1}}. \quad (**)$$

Диаметру тёмного пятна соответствует меньшее из двух найденных значений. Большее значение определяет диаметр внешнего светлого кольца вокруг тёмного пятна (можно видеть на фото 2 из условия). Таким образом, $D = \min(D_1, D_2)$.

Поместим линейку в сосуд № 2 и, включив лазер, начнём с помощью шприца наливать внутрь воду. Занесём в таблицу результаты измерений.

V , мл	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
D , мм	46	51	55	58	63	66	70	73	76	75	75

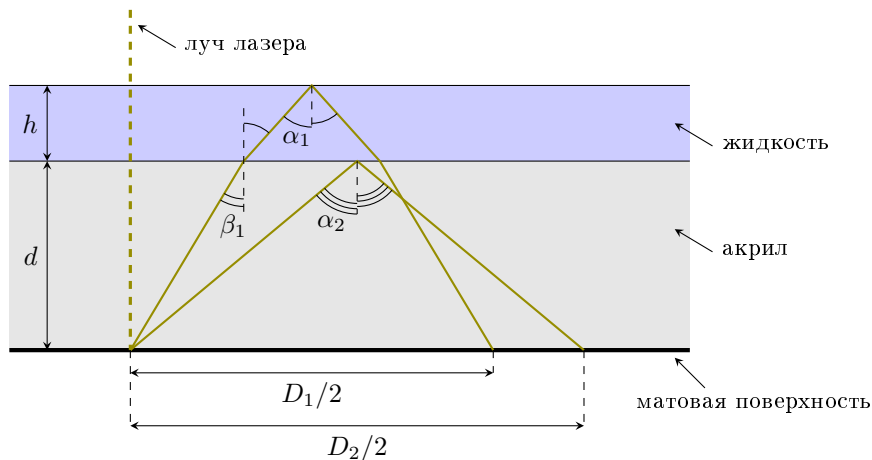


Рис. 3

При малых значениях V вода занимает пространство между стенками сосуда и пластиной, поэтому при $V < V_1$ (значение V_1 предстоит найти из графика) диаметр пятна постоянен: $D = D_0 = 34$ мм. Аналогично, при больших значениях V (когда V больше некоторого значения V_2) диаметр пятна определяется формулой (**), следовательно, также постоянен. В интервале $V_1 < V < V_2$ зависимость $D(V)$, согласно (*), должна быть линейной. Отметим на координатной плоскости точки, полученные в п. 2.3, и построим график, учитывающий особенности, указанные выше (рис. 3).

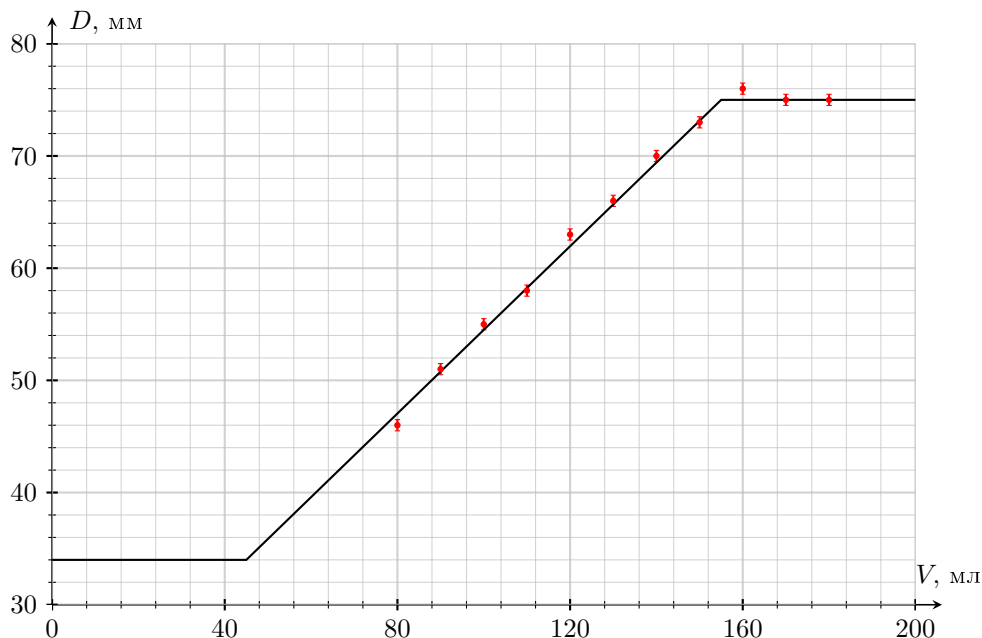


Рис. 3

Построенный график представляет собой ломаную — три прямолинейных участка, два из которых горизонтальные. Вершины ломаной имеют координаты (44 мл; 34 мм) и (155 мл; 75 мм).

Максимальное значение диаметра пятна $D_2 = 75$ мм, а минимальное — $D_0 = 34$ мм. Используя формулу, аналогичную полученной в пп. 1.1, запишем

$$D_0 = \frac{4d}{\sqrt{n_{\text{пл}}^2 - 1}},$$

откуда

$$\delta = \frac{D_2^2}{D_0^2} = \frac{n_{\text{пл}}^2 - 1}{n_{\text{пл}}^2/n_{\text{в}}^2 - 1} \Rightarrow n_{\text{пл}} = n_{\text{в}} \sqrt{\frac{\delta - 1}{\delta - n_{\text{в}}^2}}.$$

Так как $\delta = (75/34)^2 \approx 4,866$, показатель преломления материала пластины (акрила) равен

$$n_{\text{пл}} = 1,334 \cdot \sqrt{\frac{3,866}{4,866 - 1,780}} \approx 1,49.$$

Толщину пластины определим из формулы для D_0 :

$$d = \frac{D_0}{4} \sqrt{n_{\text{пл}}^2 - 1} = \frac{34 \text{ мм}}{4} \sqrt{1,49^2 - 1} \approx 9,4 \text{ мм}.$$

Оценим теперь погрешности полученных значений.

$$\varepsilon_\delta = 2\varepsilon_{D_0} + 2\varepsilon_{D_2} = \frac{2 \cdot 1 \text{ мм}}{34 \text{ мм}} + \frac{2 \cdot 1 \text{ мм}}{75 \text{ мм}} = 0,08 \Rightarrow \Delta\delta = \delta \cdot \varepsilon_\delta = 0,4.$$

Используя малость погрешности $n_{\text{в}}$, вычислим $\Delta n_{\text{пл}}$:

$$\varepsilon_{n_{\text{пл}}} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{\delta - 1} - \frac{1}{\delta - n_{\text{в}}^2} \right| \Delta\delta = 0,012 \Rightarrow \Delta n_{\text{пл}} = n_{\text{пл}} \cdot \varepsilon_{n_{\text{пл}}} = 0,02.$$

Аналогично поступим при нахождении Δd :

$$\varepsilon_d = \varepsilon_{D_0} + \frac{n_{\text{пл}} \Delta n_{\text{пл}}}{n_{\text{пл}}^2 - 1} = 0,055 \Rightarrow \Delta d = d \varepsilon_d \approx 0,5.$$

Возьмём шаблон и выровняем его поверхность, прижав края к столу имеющимся оборудованием (штативом, обоими сосудами). Приложим линейку к шкале, напечатанной на шаблоне, и найдём цену деления этой шкалы:

$$C = \frac{80 \text{ мм}}{105} \approx 0,762 \text{ мм}.$$

Медленно и аккуратно с помощью шприца нальём воду на поверхность шаблона. Получившаяся «лужа» должна быть как можно большего размера (ориентировочно, объём налитой воды ≈ 80 мл). Если посмотреть на в отражение в налитой «луже», то по отсутствию искажений можно определить, какая часть её поверхности является плоской. Включим лазер и посветим на шаблон с водой так, чтобы луч падал на поверхность шаблона вплотную к шкале (но не на неё!). Дождавшись прекращения движения границы «лужи», измерим диаметр тёмного пятна

$$D_{\text{к}} = 19 \text{ дел} = 19 \cdot C = 19 \cdot 0,762 \text{ мм} \approx 14,5 \text{ мм},$$

$$\Delta D_{\text{к}} = 1 \text{ дел} \Rightarrow \varepsilon_{D_{\text{к}}} \approx 6\%.$$

С помощью формулы из п. 1.1 вычислим толщину слоя воды в месте, куда светили лазером:

$$h = \frac{D_{\text{к}}}{4} \sqrt{n_{\text{в}}^2 - 1} \approx 3,2 \text{ мм}.$$

Так как $\varepsilon_{n_{\text{в}}} \ll \varepsilon_h$, относительные погрешности h и $D_{\text{к}}$ равны, поэтому

$$\Delta h = h \cdot \varepsilon_h = 0,2 \text{ мм}.$$

Горизонтальный размер «лужи» много больше её толщины h , поэтому верхняя поверхность воды является практически плоской. Это даёт возможность связать толщину слоя воды с углом смачивания, рассматривая задачу как двумерную. Рассмотрим маленький участок слоя жидкости шириной L и условие её равновесия в проекции на горизонтальную ось x (силы, действующие на этот участок в горизонтальном направлении, изображены на рис. 4):

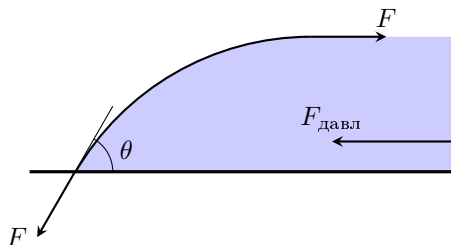


Рис. 4

$$0 = F \cos \theta - F + p_{\text{ср}} Lh = \sigma L \cos \theta - \sigma L + \frac{\rho_{\text{в}} g L h^2}{2},$$

где $F = \sigma L$ — сила поверхностного натяжения, $p_{\text{ср}} = \rho_{\text{в}} g h / 2$ — среднее по высоте гидростатическое давление.

Выражая отсюда h , получим

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho_{\text{в}} g}} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{\text{в}} g}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Вычислим теперь значение угла θ :

$$\theta = 2 \arcsin \left(\frac{h}{2} \sqrt{\frac{\rho_{\text{в}} g}{\sigma}} \right) = 2 \arcsin(0,58) = 72^\circ.$$

Оценим относительную погрешность аргумента арксинуса $A = 0,5h\sqrt{\rho_{\text{в}} g / \sigma}$:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_h + 0,5(\varepsilon_\sigma + \varepsilon_{\rho_{\text{в}}} + \varepsilon_g) = 7,8\%.$$

Откуда

$$\Delta \theta = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2A\varepsilon_A}{\sqrt{1 - A^2}} \approx 6^\circ.$$