

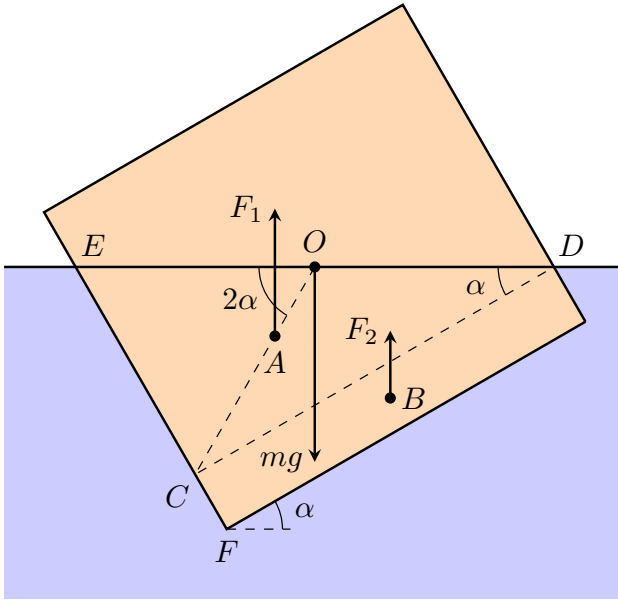
ЛІХ Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Задача №10-1. Всплывающий брусок

Рассмотрим сначала ситуацию, когда брусок плавает, не касаясь дна и повернувшись на угол α вокруг своей продольной оси (на рисунке изображено поперечное сечение бруска). Поскольку плотность материала равна 50% плотности воды, брусок погружён на половину своего объёма, и, следовательно, поверхность воды проходит через продольную ось симметрии бруска (через точку O на рис.). Помимо силы тяжести, приложенной в точке O , на брусок действует сила Архимеда. Для удобства подсчётов, разобьём погружённую часть изображённого сечения отрезком CD на две фигуры — треугольник ECD и оставшийся прямоугольник — и найдём центры масс каждой из них. Центр первой фигуры находится в точке пересечения медиан $\triangle ECD$ (в точке A), а центр второй — в точке B , где пересекаются диагонали прямоугольника.



Учитывая, что $CD = a$, $EC = a \operatorname{tg} \alpha$, $CF = (b - a \operatorname{tg} \alpha)/2$, и обозначив длину бруска как L , запишем выражения для составляющих силы Архимеда F_1 и F_2 , приложенных в точках A и B соответственно:

$$F_1 = \rho_{\text{в}} g L \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} g a^2 L \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2 = \rho_{\text{в}} g a L \cdot \frac{b - a \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Длины отрезков AO и BO , опираясь на различные геометрические теоремы, можно найти как

$$AO = \frac{1}{3} CO = \frac{1}{6} ED = \frac{a}{6 \cos \alpha}, \quad BO = \frac{a \operatorname{tg} \alpha + CF}{2} = \frac{b + a \operatorname{tg} \alpha}{4}.$$

Определим теперь значение угла α , не равное нулю, при котором брусок находится в равновесии. Для этого запишем правило моментов относительно точки O :

$$F_1 \cdot AO \cos 2\alpha = F_2 \cdot BO \cos(90^\circ - \alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} g a^2 L \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a \cos 2\alpha}{6 \cos \alpha} = \rho_{\text{в}} g a L \cdot \frac{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{8} \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{2}{3}(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2 \alpha &= 3 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ. \end{aligned}$$

Данное положение равновесия является устойчивым, так как при $\alpha > 30^\circ$ момент силы F_1 превышает момент силы F_2 , и брусок будет поворачиваться по часовой стрелке (угол α будет уменьшаться). Если же $\alpha < 30^\circ$, то, наоборот, момент силы F_2 будет больше, и брусок будет поворачиваться против часовой стрелки (α станет увеличиваться). Причём это справедливо, в том числе, и для малых углов, близких к 0° . Таким образом, когда вода дойдёт до высоты $b/2$, исходное положение бруска (при $\alpha = 0^\circ$) перестанет быть устойчивым, и один из краёв бруска (левый или правый — дело случая) станет подниматься вверх. При дальнейшем подъёме уровня воды вращение бруска продолжится, пока угол α не достигнет величины 30° . Если уровень воды продолжит увеличиваться, брусок оторвётся от дна сосуда и будет плавать в таком (устойчивом!) положении. Найдём высоту уровня воды, при которой произойдёт отрыв бруска:

$$H = EF \cos \alpha = \frac{b + a \operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{7/3} + 1}{4} \cdot a \approx 0,632 a.$$

Задача №10-2. Двое против ветра

Метод №1

Рассмотрим относительное движение шариков. Запишем второй закон Ньютона для каждого из них

$$\begin{aligned} m\vec{a}_1 &= m\vec{g} - k(\vec{v}_1 - \vec{u}), \\ m\vec{a}_2 &= m\vec{g} - k(\vec{v}_2 - \vec{u}) \end{aligned}$$

и вычтем полученные выражения друг из друга

$$m\vec{a}_r = -k\vec{v}_r.$$

Здесь $\vec{a}_r = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ — относительное ускорение шариков, а $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — их относительная скорость. Из этого равенства следует, что малое изменение относительной скорости $d\vec{v}_r$ и малое изменение вектора смещения второго шарика относительно первого $d\vec{l}$ связаны соотношением

$$d\vec{v}_r = -\frac{k}{m}d\vec{l}.$$

Поскольку оно справедливо в любой момент времени, полное изменение относительной скорости $\Delta \vec{v}_r$ и полное изменение вектора смещения $\Delta \vec{l}$ связаны аналогично

$$\Delta \vec{v}_r = -\frac{k}{m} \Delta \vec{l}.$$

Согласно условию, спустя некоторое достаточно больше время относительная скорость шариков пренебрежимо мала ($\vec{v}_r = \vec{0}$), а вектор смещения между ними $\vec{l} = \vec{L}$ направлен вертикально вверх и имеет длину L , следовательно

$$\begin{aligned} \vec{0} - (\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}) &= -\frac{k}{m}(\vec{L} - \vec{0}), \\ \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} &= \frac{k}{m}\vec{L}. \end{aligned}$$

Запишем это равенство в проекции на горизонтальную ось

$$v_{20} \cos \alpha_2 - v_{10} \cos \alpha_1 = 0,$$

откуда

$$v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26 \text{ м/с}.$$

Метод №2

Запишем для первого шарика второй закон Ньютона в проекции на ось OX , направленную горизонтально вправо,

$$m \frac{dv_{1x}}{dt} = -k(v_{1x} + u).$$

Отсюда, применяя непосредственное интегрирование и учитывая начальные условия ($x_1(0) = 0$ и $v_{1x}(0) = v_{10} \cos \alpha_1$), получим

$$\begin{aligned} v_{1x}(t) &= (v_{10} \cos \alpha_1 + u)e^{-\frac{k}{m}t} - u, \\ x_1(t) &= \frac{m}{k}(v_{10} \cos \alpha_1 + u)(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - ut. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} v_{2x}(t) &= (v_{20} \cos \alpha_2 + u)e^{-\frac{k}{m}t} - u, \\ x_2(t) &= \frac{m}{k}(v_{20} \cos \alpha_2 + u)(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - ut. \end{aligned}$$

Из условия следует, что $x_1(\infty) = x_2(\infty)$, поэтому

$$v_{10} \cos \alpha_1 = v_{20} \cos \alpha_2,$$

откуда

$$v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26 \text{ м/с.}$$

Метод №1

Заметим, что в соответствии с тем, что второй шарик упал позднее, вектор $\vec{L}$ направлен вверх. Запишем полученное выше векторное равенство $\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = \frac{k}{m} \vec{L}$ в проекции на вертикальную ось

$$v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1 = \frac{k}{m} L.$$

Отсюда

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1} = 0,75 \text{ с.}$$

Теперь рассмотрим движение первого шарика в отдельности. Запишем для него второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось OY ,

$$m \frac{dv_{1y}}{dt} = -mg - kv_{1y} \quad \Rightarrow \quad dv_{1y} = -gdt - \frac{k}{m} dy_1.$$

Здесь y_1 — вертикальная координата первого шарика. Нетрудно заметить, что спустя достаточно большое время вертикальная проекция скорости примет значение $-mg/k$. Переходя к конечным приращениям так, как мы раньше сделали с относительной скоростью и вектором смещения между шариками, получим

$$-\frac{mg}{k} - v_{10} \sin \alpha_1 = -g\tau + \frac{k}{m} H.$$

Отсюда

$$H = \frac{m}{k} (g\tau - v_{10} \sin \alpha_1) - \frac{m^2}{k^2} g = 30,83 \text{ м.}$$

Метод №2

Запишем для первого шарика второй закон Ньютона в проекции на ось OY , направленную вертикально вверх,

$$m \frac{dv_{1y}}{dt} = -mg - kv_{1y}.$$

Отсюда, интегрируя с учётом начальных условий ($y(0) = 0$ и $v_{1y}(0) = v_{10} \sin \alpha_1$), получим

$$\begin{aligned} v_{1y}(t) &= \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}, \\ y_1(t) &= \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k} t. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} v_{2y}(t) &= \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}, \\ y_2(t) &= \frac{m}{k} \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k}t. \end{aligned}$$

Из условия следует, что $y_2(\infty) - y_1(\infty) = L$, так что

$$\frac{m}{k} (v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1) = L.$$

Отсюда

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1} = 0,75 \text{ с.}$$

Согласно условию,

$$H = -y_1(\tau) = \frac{mg}{k}\tau - \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}) = 30,84 \text{ м.}$$

Метод №1

Рассмотрим движение системы шариков как целого. Ускорение центра масс $\vec{a}_c = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2$ связано с внешними силами выражением

$$2m\vec{a}_c = -k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{u}) + 2m\vec{g} = -2k(\vec{v}_c - \vec{u}) + 2m\vec{g},$$

где $\vec{v}_c = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$ — скорость центра масс. Введём обозначение $\vec{v}_f = \vec{u} + m\vec{g}/k$ — несложно показать, что это установившаяся скорость любого из шариков. По-лучим

$$\vec{a}_c = -\frac{k}{m}(\vec{v}_c - \vec{v}_f).$$

Перейдём в систему отсчёта, которая движется с постоянной скоростью $\vec{v}_f$. Уско-рение и скорость центра масс в этой системе обозначим $\vec{a}'_c$ и $\vec{v}'_c$ соответственно. Тогда

$$\vec{a}'_c = -\frac{k}{m}\vec{v}'_c.$$

Это уравнение описывает прямолинейное движение! При этом известно, что центр масс дважды проходил через точку O , которая в выбранной системе отсчёта дви-жется с постоянной скоростью $-\vec{v}_f$. Следовательно, $\vec{v}'_c \parallel \vec{v}_f$. Но $\vec{v}'_c = \vec{v}_c - \vec{v}_f$, а значит

$$\vec{v}_c \parallel \vec{v}_f,$$

то есть

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \parallel \left(\vec{u} + \frac{m\vec{g}}{k} \right).$$

Это верно для любого момента времени, в том числе для начального. Таким образом

$$\frac{v_{10} \cos \alpha_1 + v_{20} \cos \alpha_2}{v_{10} \sin \alpha_1 + v_{20} \sin \alpha_2} = \frac{u}{mg/k}.$$

С учётом $v_{20} \cos \alpha_2 = v_{10} \cos \alpha_1$ отсюда получим

$$u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96 \text{ м/с}.$$

Метод №2

Пусть ось OY шарики пересекают в момент времени t_1 на расстояниях h от точки O . Тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{k}(v_{10} \cos \alpha_1 + u)(1 - e^{-\frac{k}{m}t_1}) - ut_1, \\ -h &= \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t_1}) - \frac{mg}{k}t_1, \\ h &= \frac{m}{k} \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t_1}) - \frac{mg}{k}t_1. \end{aligned}$$

Исключив из этой системы t_1 и h , выразим

$$u = \frac{2mg}{k} \frac{v_{10} \cos \alpha_1}{v_{10} \sin \alpha_1 + v_{20} \sin \alpha_2}.$$

С учётом $v_{20} \cos \alpha_2 = v_{10} \cos \alpha_1$ отсюда получим

$$u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96 \text{ м/с}.$$

Задача №10-3. Газировка под поршнем

Пусть $V_{\text{в}}$ — объём верхней части сосуда, V_1 и V_2 — объёмы газа и, соответственно, газированной воды в нижней части сосуда. Так как вода поступает с постоянной скоростью, а суммарный объём сосуда равен $2V_0$, то

$$V_2 = qt, \quad V_1 = 2V_0 - V_{\text{в}} - qt.$$

Рассмотрим случай, когда вода ещё не заполнила всю нижнюю часть сосуда ($V_1 > 0$). Поршень, разделяющий сосуд, лёгкий и движется без трения, поэтому давление углекислого газа P по обе стороны от него одинаково. Масса CO_2 , растворённого в воде, согласно закону Генри равна

$$m_2 = \mu_{\text{п}} V_2 = kPV_2 = kPqt.$$

В начальный момент массы газа в верхней и нижней частях сосуда равны, следовательно в некоторый момент t масса газа под поршнем

$$m_1 = m_{\text{в}} - m_2 = m_{\text{в}} - kPqt, \quad (*)$$

где $m_{\text{в}}$ — масса углекислого газа в верхней части сосуда. Запишем теперь уравнения Менделеева–Клапейрона для газа, находящегося по обе стороны от поршня, и, выражая отсюда массы, подставим их в уравнение $(*)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} PV_{\text{в}} = m_{\text{в}}RT_0/M, \\ PV_1 = m_1RT_0/M \end{cases} &\Rightarrow \frac{PV_1M}{RT_0} = \frac{PV_{\text{в}}M}{RT_0} - kPqt \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_1 = V_{\text{в}} - \frac{kRT_0}{M} \cdot qt. \end{aligned}$$

Отсюда, решая систему, найдём, что

$$V_{\text{в}} = V_0 + \frac{qt}{2} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right), \quad V_1 = V_0 - \frac{qt}{2} \left(\frac{kRT_0}{M} + 1 \right). \quad (**)$$

Поскольку

$$\frac{kRT_0}{M} = \frac{3,17 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31 \cdot 274}{0,044} \approx 1,64 > 1,$$

то из первого выражения в $(**)$ следует, что $V_{\text{в}}$ увеличивается с постоянной скоростью, а поршень движется вниз. Скорость его движения равна

$$v_{\text{п}} = \frac{\Delta V_{\text{в}}}{S\Delta t} = \frac{q}{2S} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right) = \frac{4 \text{ см}^3/\text{с}}{256 \text{ см}^2} (1,64 - 1) \approx 0,01 \text{ см}/\text{с}.$$

Из второго выражения в $(**)$ следует, что объём газа над поверхностью воды в нижней части сосуда непрерывно уменьшается и в момент времени

$$t_1 = \frac{2V_0}{q(kRT_0/M + 1)} = \frac{2 \cdot 6,6 \text{ л}}{0,004 \text{ л}/\text{с} \cdot (1,64 + 1)} \approx 1250 \text{ с}$$

становится нулевым, весь газ оказывается растворённым в жидкости, а жидкость упирается в поршень. В дальнейшем поступающая вода будет поднимать поршень, а объём газа в верхней части сосуда станет уменьшаться. Процесс, происходящий с газом над поршнем, изотермический, поэтому минимальное давление P_{min} достигается при максимальном $V_{\text{в}}$, то есть через время $t = t_1$ после включения насоса.

Максимальный объём верхней части сосуда достигается в момент времени t_1 . Найдём этот объём, подставив выражение для t_1 в первую формулу $(**)$:

$$V_{\text{в max}} = 2V_0 \cdot \frac{kRT_0/M}{kRT_0/M + 1} \approx 8,2 \text{ л}.$$

Давление газа над поршнем в этот момент, согласно закону Бойля–Мариотта, равно

$$P_{min} = \frac{P_0 V_0}{V_{b\max}} \approx 132 \text{ кПа}.$$

В момент выключения насоса давление газа над поршнем равно $P_{кр}$, а объём верхней части сосуда составляет

$$V_{b\text{кр}} = \frac{P_0 V_0}{P_{кр}} = \frac{2V_0}{5} = 2,64 \text{ л}.$$

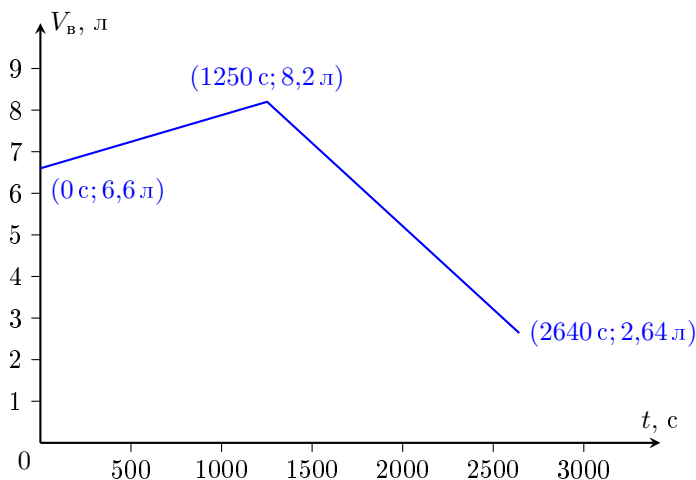
Объём остальной части сосуда, заполненной водой, равен

$$V_{2\text{кр}} = 2V_0 - V_{b\text{кр}} = \frac{8V_0}{5}.$$

Отсюда получим, что время работы насоса

$$t_2 = \frac{V_{2\text{кр}}}{q} = \frac{8V_0}{5q} = 2640 \text{ с}.$$

Исходя из результатов, полученных в предыдущих пунктах, график зависимости $V_b(t)$ имеет вид ломаной, состоящей из двух прямолинейных участков. Вершина ломаной находится в точке с координатами $(t_1; V_{b\max})$, а её концы — в точках $(0; V_0)$ и $(t_2; V_{b\text{кр}})$. Построим график функции $V_b(t)$, отметив на нём характерные точки.



Задача №10-4. Гантель в полости

Рассмотрим плоскость, перпендикулярную осям полости и цилиндра. Пусть O — точка пересечения оси цилиндра с этой плоскостью, а O' — точка пересечения с осью полости (рис. 1). Выберем произвольную точку A внутри полости. Если $\vec{r} = \vec{OA}$, $\vec{r}' = \vec{O'A}$, а $\vec{d} = \vec{OO'}$, тогда $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d}$.

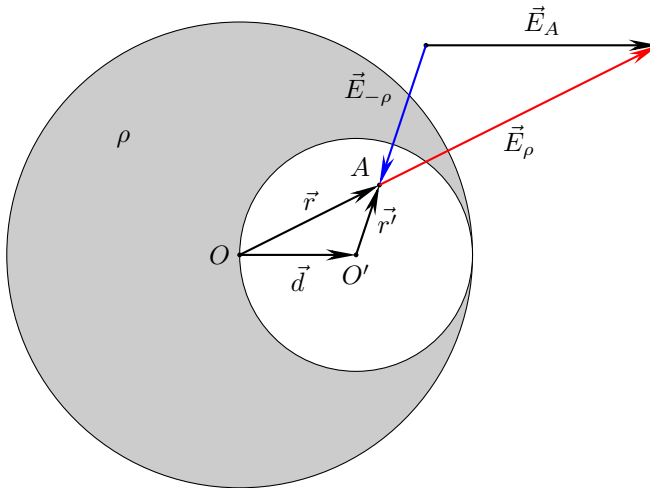


Рис. 1

Пусть ρ — объёмная плотность заряда цилиндра, тогда полость можно представить как суперпозицию цилиндров с объёмной плотностью заряда ρ и $-\rho$. Первый цилиндр дополняет цилиндр с вырезом до полного сплошного цилиндра. Поле внутри выреза представим как суперпозицию полей дополненного цилиндра и цилиндра с плотностью заряда $-\rho$.

Используя симметрию, найдём с помощью теоремы Гаусса напряжённость поля $E(r)$ внутри равномерно заряженного цилиндра:

$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}, \text{ где } \Phi_E = 2\pi r l E(r), q_{in} = \pi r^2 l \rho,$$

откуда $E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ или, в векторном виде, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r}$. Тогда напряжённость поля в произвольной точке A равна

$$\vec{E}_A = \vec{E}_\rho(\vec{r}) + \vec{E}_{-\rho}(\vec{r}') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r} + \frac{(-\rho)}{2\varepsilon_0} \vec{r}' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{d}.$$

Таким образом, поле внутри полости однородно, вектор напряжённости направлен горизонтально, а его модуль равен $E_{\pi} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}$.

На заряженный шарик массой m и зарядом q , помещённый в полость, действует сила $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_E$, где $F_g = mg$ — сила тяжести, $F_E = \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0}$ — сила со стороны электрического поля. Эти силы взаимно перпендикулярны и однородны, поэтому шарик будет двигаться с постоянным ускорением $a = \sqrt{g^2 + \left(\frac{q\rho R}{4m\varepsilon_0}\right)^2}$.

С другой стороны, шарик долетел до стенки полости за время τ . Это значит, что $a = \frac{2(R/2)}{\tau^2} = \sqrt{2}g$, откуда $\rho = \frac{4\varepsilon_0 mg}{qR}$.

Пусть B — середина стержня, $r = 3R/8$ — радиус кольца, а $L = \sqrt{2}r$ — расстояние между бусинками. При движении стержня с бусинками вектор $\vec{O'B}$ будет поворачиваться против часовой стрелки в плоскости рисунка, а скорость обеих бусинок будет, в силу кинематической связи, одинакова. Обозначим φ угол поворота вектора $\vec{O'B}$ и найдём значение угла φ_p , соответствующее максимальной скорости бусинок.

Метод №1

Согласно теореме о кинетической энергии

$$\frac{3mv^2}{2} = A_g + A_E,$$

где v — скорость бусинок, A_g и A_E — работа силы тяжести и электрической силы соответственно. Запишем выражения для обеих работ при повороте вектора $\vec{O'B}$ на угол φ :

$$A_g = mgr(\cos(\varphi - \pi/4) - \cos(\pi/4)) + 2mgr(\cos(\pi/4 + \varphi) - \cos(\pi/4)),$$

$$A_E = 2qE_{\pi}r(\sin(\varphi - \pi/4) + \sin(\pi/4)) + qE_{\pi}r(\sin(\pi/4 + \varphi) - \sin(\pi/4)).$$

Из соотношений, найденных в первом пункте, получим, что

$$qE_{\pi} = q \cdot \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} = mg.$$

Используя это, запишем выражение для суммарной работы:

$$A_{\Sigma} = A_g + A_E = mgr(2\cos(\varphi - \pi/4) - \sqrt{2}).$$

Скорость бусинок будет наибольшей тогда, когда A_{Σ} достигнет максимума, то есть при $\varphi_p = \pi/4$. Подставляя это значение в выражение для суммарной работы,

получим

$$A_{\Sigma max} = mgr(2 - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{3mv_{max}^2}{2} = mgr(2 - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}.$$

Метод №2

В момент достижения бусинками максимальной скорости их тангенциальное ускорение равно нулю. Поэтому сумма моментов сил тяжести и электрических сил, рассчитанных в данный момент относительно точки O' , равна нулю. Запишем выражения для M_g и M_E (суммарного момента сил тяжести и электрических сил соответственно), принимая в качестве положительного направление против часовой стрелки:

$$M_g = -mgr \sin(\varphi - \pi/4) - 2mgr \sin(\varphi + \pi/4),$$

$$M_E = 2qE_{\pi} r \cos(\varphi - \pi/4) + qE_{\pi} r \cos(\varphi + \pi/4).$$

Из соотношений, найденных в первом пункте, получим, что

$$qE_{\pi} = q \cdot \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} = mg.$$

Используя это, запишем выражение для суммарного момента

$$M_{\Sigma} = M_g + M_E = -mgr \sin(\varphi - \pi/4) - 2mgr \sin(\varphi + \pi/4) +$$

$$+ 2mgr \cos(\varphi - \pi/4) + mgr \cos(\varphi + \pi/4) = -2mgr \sin(\varphi - \pi/4).$$

При $\varphi < \pi/4$ суммарный момент положительный, и система разгоняется, достигая максимальной скорости при $\varphi_p = \pi/4$, когда $M_{\Sigma} = 0$. Согласно закону изменения энергии

$$\frac{3mv_{max}^2}{2} + 2mgr - 3mg \cdot \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2qE_{\pi} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} + qE_{\pi} \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда

$$\frac{3mv_{max}^2}{2} = mgr(2 - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}.$$

Сделаем несколько утверждений:

1) Так как стержень невесом, сумма сил, действующих на стержень, равна нулю.

2) Так как стержень и бусинки соединены шарнирно, сила, с которой стержень действует на бусинки, направлена вдоль него.

3) В момент достижения бусинкой максимальной скорости её тангенциальное ускорение равно нулю, поэтому проекция сил, действующих на эту бусинку, на ось, перпендикулярную радиусу, равна нулю.

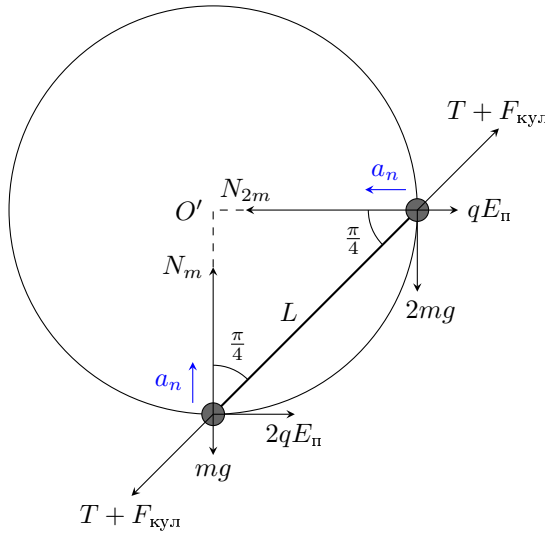


Рис. 2

Рассмотрим силы, действующие на каждую из бусинок в момент достижения ими максимальной скорости, то есть при $\varphi_p = \pi/4$ (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для нижней бусинки в проекции на горизонтальную ось, учитывая третье утверждение,

$$0 = 2qE_n - (T + F_{кул}) \cos(\pi/4),$$

где T — сила реакции стержня, а $F_{кул} = q^2/(2\pi\epsilon_0 L^2)$ — сила электростатического отталкивания бусинок.

Отсюда получим, что

$$T = 2\sqrt{2}qE_n - F_{кул} = 2\sqrt{2}mg - \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} = 2\sqrt{2}mg - \frac{16q^2}{9\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Нормальное ускорение в этот момент равно $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3}g$. Запишем

второй закон Ньютона для обеих бусинок в проекции на радиально направленные оси (для нижней бусинки — на вертикальную, для верхней — на горизонтальную):

$$ma_n = -(T + F_{\text{кул}}) \sin(\pi/4) - mg + N_m,$$

$$2ma_n = -(T + F_{\text{кул}}) \sin(\pi/4) - qE_{\text{п}} + N_{2m}.$$

Поскольку $T + F_{\text{кул}} = 2\sqrt{2}qE_{\text{п}}$,

$$N_m = mg + ma_n + 2qE_{\text{п}} = 3mg + mg \cdot \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3} = mg \cdot \frac{13 - 2\sqrt{2}}{3},$$

$$N_{2m} = 2ma_n + 3qE_{\text{п}} = 3mg + mg \cdot \frac{4(2 - \sqrt{2})}{3} = mg \cdot \frac{17 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Задача №10-5. Термистор, лазер и диод

Когда диод открывается, напряжение на нём и на термисторе равно U_0 , а сила тока через диод равна нулю. Поэтому сила тока, протекающего через резистор r и термистор, равна $I = (\mathcal{E}_1 - U_0)/r$. С другой стороны,

$$I = U_0/R_0 \cdot (1 + \alpha(t_1 - t_0))^2,$$

где t_1 — температура термистора в данном режиме. Приравнивая эти выражения, находим, что

$$\alpha(t_1 - t_0) = \sqrt{\frac{R_0}{r} \cdot \frac{(\mathcal{E}_1 - U_0)}{U_0}} - 1 = 0,5.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$\frac{U_0^2}{R_0} \cdot (1 + \alpha(t_1 - t_0))^2 = k(t_1 - t_0),$$

где k — коэффициент в законе Ньютона-Рихмана. Выразим из данного выражения величину k/α :

$$\frac{k}{\alpha} = \frac{U_0^2}{R_0} \cdot \frac{(1 + \alpha(t_1 - t_0))^2}{\alpha(t_1 - t_0)} = 0,3 \text{ Вт}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда на термистор светят лазером. Запишем условие баланса мощностей при напряжении на термисторе, равном U :

$$\frac{U^2}{R_0} \cdot (1 + \alpha(t - t_0))^2 + P = k(t - t_0).$$

Выразим U^2 :

$$U^2 = R_0 \cdot \frac{k(t - t_0) - P}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} \quad (*)$$

и найдём максимум этой функции. Обозначая $z = \alpha(t - t_0 - P/k)$, получим

$$U^2 = \frac{R_0 k / \alpha \cdot z}{(1 + \alpha P / k + z)^2} = \frac{R_0 k / \alpha}{\left(\frac{1 + \alpha P / k}{\sqrt{z}} + \sqrt{z}\right)^2}.$$

Далее используем неравенство о средних:

$$U^2 \leq U_{max}^2 = \frac{R_0 k / \alpha}{4(1 + \alpha P / k)}.$$

Если диод не открывается при любой ЭДС источника,

$$U_{max} \leq U_0 \quad \Rightarrow \quad P \geq \frac{k}{\alpha} \cdot \left(\frac{R_0 k / \alpha}{4U_0^2} - 1 \right) = 0,0375 \text{ Вт}.$$

Таким образом, минимальная тепловая мощность, которую должен передавать лазер, чтобы диод закрылся при любой $\mathcal{E}$, равна 37,5 мВт.

Для того чтобы понять, почему диод после выключения лазера не открылся, заметим, что выражение (*) при $P = 0$ тоже имеет максимум, а следовательно напряжение на термисторе может быть меньше U_0 как при малых токах (и малых ЭДС), так и при больших токах (и, соответственно, больших ЭДС). Подставив в (*) значения U_0 , R_0 , k/α и $P = 0$, получим уравнение

$$\frac{\alpha(t - t_0)}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} = \frac{2}{9},$$

которое имеет два корня: первый нам уже известен

$$\alpha(t_1 - t_0) = 1/2,$$

а второй — новый

$$\alpha(t_2 - t_0) = 2.$$

Рассчитаем для него ЭДС источника, считая ток через диод равным нулю:

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r + U_0 = \frac{U_0 r}{R_0} (1 + \alpha(t_2 - t_0))^2 + U_0 = \frac{9U_0 r}{R_0} + U_0 = 14 \text{ В}.$$

Таким образом, ЭДС источника надо уменьшить до 14 В, чтобы диод снова открылся.