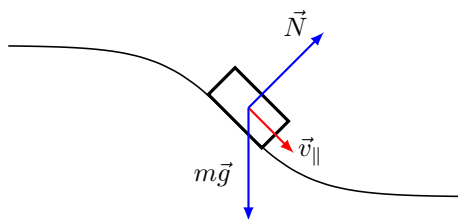
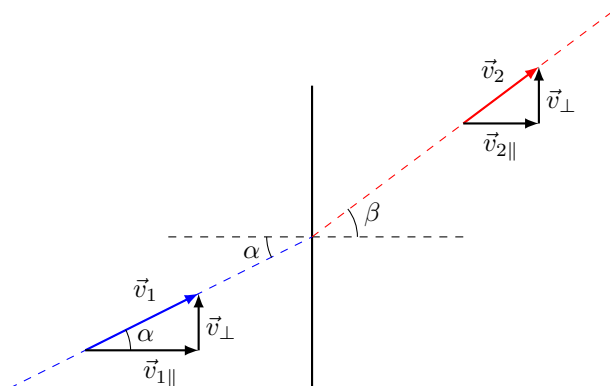


Задача №11-1. Выбоина

Рассмотрим скатывание шайбы по границе. В малой окрестности области скатывания участок деформации выбоины можно считать некоторым наклонным профилем. Тогда сила реакции на шайбу действует только в вертикальной плоскости, проходящей через центры шайбы и выбоины (см. рис.), а значит из закона сохранения импульса следует, что перпендикулярная этому сечению компонента скорости шайбы сохраняется.

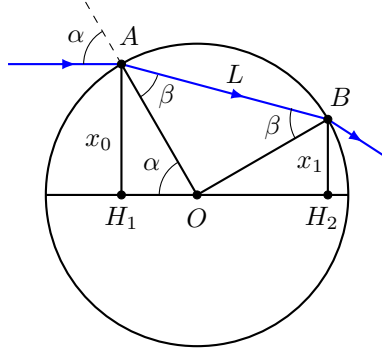


На поверхности вне выбоины скорость шайбы v_1 и она направлена под углом α к перпендикуляру к границе раздела. На дне выбоины скорость шайбы v_2 и она направлена под углом β к границе раздела. Из рисунка видно, что при переходе шайбы с одной горизонтальной плоскости на другую можно получить формулу, похожую на закон преломления света: $v_{\perp} = v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$.



Пусть угол падения равен α , а угол преломления β . Из предыдущего результата: $v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$ получаем $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, где $n = \frac{v_2}{v_1}$. Теперь проанализируем геометрию траектории. Построим вспомогательные высоты AH_1 и BH_2 , длины которых из условия равны x_0 и x_1 . Так как $AO = OB$ (это радиусы, которые

равны R), то $\angle OAB = \angle OBA = \beta$. Тогда из $\triangle AOB$: $AB = L = 2R \cos \beta$. Из геометрии для трапеции AH_1H_2B видно, что $x_0 - x_1 = L \sin(\alpha - \beta)$.



Тогда получаем, что $x_1 = x_0 - 2R \cos \beta (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$. Также из $\triangle AOH_1$ мы видим, что $\sin \alpha = \frac{x_0}{R}$. Таким образом мы можем получить зависимость:

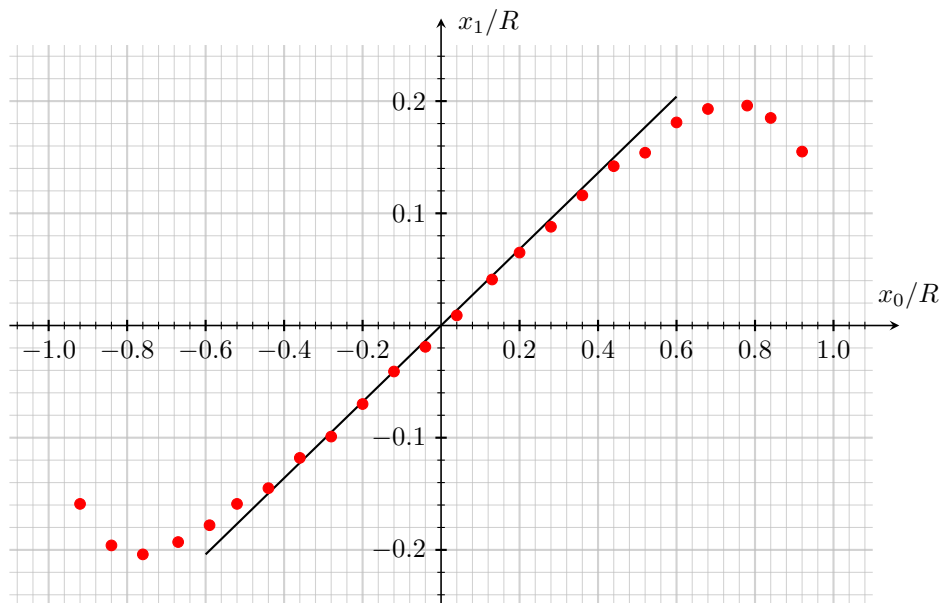
$$\frac{x_1}{R} = \frac{x_0}{R} \left(\frac{2}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 + \frac{2}{n} \sqrt{1 - \frac{n^2 + 1}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^4} - 1 \right).$$

Однако она получается сложной для анализа, поэтому обратим внимание на центральную часть графика. Можно заметить, что центральный участок графика близок к линейной зависимости и для него выполняется условие $\frac{x_0}{R} \ll 1$. Используем его и преобразуем зависимость для центрального участка:

$$\frac{x_1}{R} = \frac{x_0}{R} \left(\frac{2}{n} - 1 \right).$$

Это выражение можно было получить сразу, воспользовавшись малостью углов α и β . Мы видим, что при малых x_0 зависимость $x_1(x_0)$ — линейная, причем угловой коэффициент этой прямой $k = \left(\frac{2}{n} - 1 \right)$. Строим аппроксимирующую прямую в центральной части графика.

Из графика получаем $k \approx 0,34$. Тогда $n = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{1+k} \approx 1,49$, откуда $v_2 = 1,49v_1$. Тогда из закона сохранения энергии: $\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh$ находим глубину выбойны: $h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$.



Подставляя числа, получим итоговый ответ:

$$h \approx 0,61 \frac{v_1^2}{g}$$

Исследуем, при каких условиях x_1 не зависит от x_0 . При $n = 2$ на центральном участке $k = 0$, что соответствует тому, что траектории фокусируются в точке установки ворот.

Тогда $v_2 = 2v_1$, а для h получим:

$$h = 1,5 \frac{v_1^2}{g}$$

Задача №11-2. Молекулярка

На участках 1 – 2 и 3 – 4 давление и объём прямо пропорциональны друг другу, поэтому вдоль этих участков они одновременно увеличиваются или уменьшаются. Следовательно, температура монотонно изменяется и достигает минимального и максимального значения на концах этих участков. Участки цикла (2 – 3 и 4 – 1) являются изотермами, так как $p = nkT$, поэтому $p/n = \text{const}$ только при $T = \text{const}$. Так как точка 2 имеет наибольшую ординату, то участок 2 – 3 является с изотермой с наибольшей температурой, а 4 – 1 – с наименьшей. Обозначим эти температуры $T_{\max}$ и $T_{\min}$ соответственно. По условию мы знаем

КПД цикла Карно, построенного между этими температурами:

$$\eta_K = 0,5 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Получим соотношение между максимальной и минимальной температурами:

$$T_{\max} = 2T_{\min}.$$

Точка (1,1) лежит на участке 4 – 1, поэтому:

$$p_0 = \frac{N_0}{V_0} k T_{\min}$$

. Выражая температуру, получаем:

$$T_{\min} = \frac{p_0 V_0}{N_0 k} = \frac{p_0}{n_0 k}; \quad T_{\max} = \frac{2p_0}{n_0 k}.$$

Найдём коэффициент наклона графика зависимости p/p_0 от n/n_0 для изотермы с температурой T :

$$p = nkT, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{n_0 k T}{p_0} \cdot \frac{n}{n_0}$$

Коэффициент наклона является тангенсом соответствующего угла:

$$\tan \beta = \frac{n_0 k T}{p_0}.$$

Подставим найденные ранее температуры и получим ответ.

Для 4 – 1: $\tan \beta_{4-1} = 1$ или $\beta_{4-1} = 45^\circ$. Для 2 – 3: $\tan \beta_{2-3} = 2$ или $\beta_{2-3} = \arctan 2 = 63,4^\circ$.

Заметим, что на 4 – 1 из найденного ранее значения температуры получаем $T/T_0 = 1$, аналогично на 2 – 3 имеем $T/T_0 = 2$. Соответственно точка (1,1) принадлежит участку 4 – 1 и в такой системе координат. Теперь проанализируем вид участков 1 – 2 и 3 – 4. На них давление и объём пропорциональны:

$$\frac{p}{p_0} \propto \frac{V}{V_0} = \frac{n_0}{n},$$

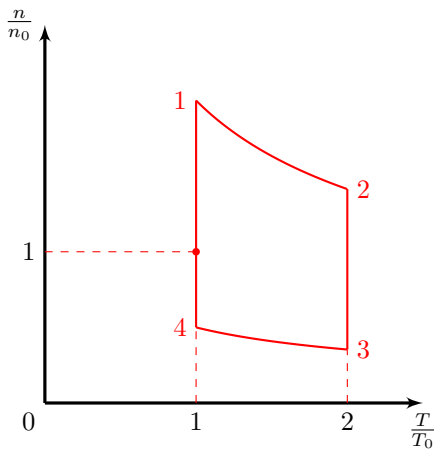
так как $nV = n_0 V_0 = N_0$.

$$n = \frac{p}{kT} \propto \frac{V}{T} \propto \frac{1}{nT}, \quad n^2 \propto \frac{1}{T}$$

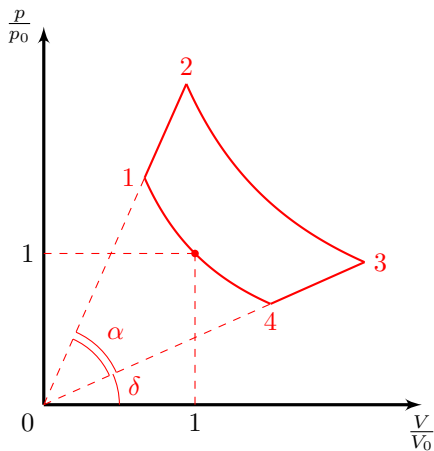
Таким образом на этих участках имеем:

$$\frac{n}{n_0} \propto \sqrt{\frac{T_0}{T}}.$$

Построим качественно график.



Для удобства нарисует наш цикл в координатах $p/p_0 - V/V_0$.



Заметим, что 1 – 2 и 3 – 4 удовлетворяют уравнению $pV^{-1} = \text{const}$, то есть это политропы. Найдём теплоёмкость в таком процессе.

$$\delta Q = dU + \delta A = \nu C_V dT + p dV$$

$$p \propto V \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dV}{V}$$

$$\begin{aligned}
 pV = \nu RT &\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 2 \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dT}{2T} \\
 pdV &= \frac{pV dT}{2T} = \frac{\nu RT dT}{2T} = \frac{\nu R}{2} dT \\
 \delta Q &= \nu C_V dT + \frac{\nu R}{2} dT = \nu \left(C_V + \frac{R}{2} \right) dT
 \end{aligned}$$

Учитывая, что газ двухатомный, получаем, что в этих процессах его теплоёмкость $C = 3\nu R$. Таким образом можем найти теплоту в процессах 1 – 2 и 3 – 4:

$$Q_{1-2} = -Q_{3-4} = C(2T_0 - T_0) = 3\nu RT_0.$$

Обозначим угол между 3 – 4 и осью абсцисс δ . Найдём значения объёма газа в вершинах цикла. Точка 4:

$$\frac{p_4}{p_0} \cdot \frac{V_4}{V_0} = \left(\frac{V_4}{V_0} \right)^2 \tan \delta = \frac{T_4}{T_0} = 1, \quad \frac{V_4}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{\tan \delta}}$$

Аналогично получим остальные значения.

$$\frac{V_3}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{\tan \delta}}, \quad \frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{\tan(\delta + \alpha)}}, \quad \frac{V_2}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{\tan(\delta + \alpha)}}$$

Найдём теплоты на участках 4 – 1 и 2 – 3. Так как это изотермы, то они равны соответствующим работам.

$$\begin{aligned}
 Q_{2-3} &= \int_{V_2}^{V_3} p dV = 2\nu RT_0 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = 2\nu RT_0 \ln \frac{V_3}{V_2}, \\
 Q_{2-3} &= 2\nu RT_0 \ln \left(\sqrt{\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta}} \right) = \nu RT_0 \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично для участка 4 – 1.

$$Q_{4-1} = -\frac{\nu RT_0}{2} \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right).$$

Заметим, что работа в цикле $A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1}$. При этом тепло подводится только на участках 1 – 2 и 2 – 3, поэтому $Q_+ = Q_{1-2} + Q_{2-3}$. Таким образом КПД цикла:

$$\eta = \frac{\frac{\nu RT_0}{2} \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right)}{\nu RT_0 \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right) + 3\nu RT_0} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right)} \right)}.$$

Найдём, как $\frac{\tan(\delta+\alpha)}{\tan \delta}$ зависит от δ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right) &= \frac{\frac{\tan \delta}{\cos^2(\delta+\alpha)} - \frac{\tan(\delta+\alpha)}{\cos^2 \delta}}{\tan^2 \delta} = \\ &= \frac{\sin \delta \cos \delta - \sin(\delta + \alpha) \cos(\delta + \alpha)}{\sin^2 \delta \cos^2(\delta + \alpha)}. \end{aligned}$$

Заметим, что производная обращается в 0 при:

$$\sin \delta \cos \delta - \sin(\delta + \alpha) \cos(\delta + \alpha) = 0.$$

$$\sin 2\delta = \sin 2(\delta + \alpha)$$

$$2\delta = \pi - 2(\delta + \alpha)$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - (\delta + \alpha)$$

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Заметим, что это соответствует ситуации, когда 1–2 и 3–4 симметричны относительно прямой $p/p_0 = V/V_0$. Таким образом, исследуемая функция уменьшается от бесконечности при $\delta = 0$ до минимального значения в этот момент, а потом возрастает к бесконечности при $\alpha + \delta = \pi/2$. С точки зрения КПД это означает, что в симметричном случае $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ он минимален, а максимален или при максимальном значении, или при минимальном значении δ . Найдём ограничения на δ . Из физических соображений понятно, что $\delta > 0$ и $\alpha + \delta < \pi/2$. Так же из условия следует, что точка (1,1) лежит между прямыми содержащими 1–2 и 3–4, поэтому $\alpha + \delta > \pi/4$ и $\delta < \pi/4$. Суммарно получаем:

$$\max \left(0, \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \leq \delta \leq \min \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Заметим, что в любом случае симметричный случай реализуется, поэтому минимум КПД при $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$:

$$\eta \geq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \left(\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right)} \right)}.$$

Максимум КПД зависит от граничных значений δ . Если $\alpha \geq \pi/4$, то отношение тангенсов может быть сколь угодно большим и соответственно ограничение на КПД:

$$\eta < 1/2.$$

В ином случае граничные значения δ равны $\pi/4 - \alpha$ и $\pi/4$ дают одинаковый КПД, так как $\tan(\alpha + \pi/4) = 1/\tan(\pi/4 - \alpha)$, и ограничение на КПД:

$$\eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}\right)} \right)}.$$

При $\alpha \geq \pi/4$:

$$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}\right)} \right)} \leq \eta < \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \pi/4$:

$$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}\right)} \right)} \leq \eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)} \right)}.$$

В этом случае $\alpha > \pi/4$. Подставим значение угла в соответствующие формулы.

$$0,234 \leq \eta < 0,5$$

В этом случае $\alpha < \pi/4$. Подставим значение угла в соответствующие формулы.

$$0,134 \leq \eta \leq 0,153$$

Задача №11-3. Электростатический этюд

Рассмотрим один заряд q , расположенный на оси симметрии цилиндра. Поскольку поверхность цилиндра проводящая, на ней возникнут индуцированные заряды, величина которых пропорциональна q . Их электрическое поле на оси цилиндра на расстоянии z до заряда можно записать в виде

$$E_z^{(\text{ind})}(z) = qf^{(\text{ind})}(z),$$

где $f^{(\text{ind})}(z)$ — некоторая неизвестная функция, зависящая от распределения индуцированных зарядов.

Вклад в осевую напряжённость вносят не только индуцированные заряды на поверхности проводника, но и заряды, находящиеся на оси. Напряжённость от такого заряда модулем $\tilde{q}$ мы обозначим за $\tilde{q}f^{(\text{p})}$ (здесь «р» от английского point). Разумеется, её можно вычислить напрямую:

$$qf^{(\text{p})}(z) = k \frac{q}{z^2}.$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, поле в точке, где находится заряд Q :

$$E_1 = q(f(L) - f(L+l)),$$

где

$$f(z) = f^{(\text{ind})}(z) + f^{(\text{p})}(z).$$

Тогда с учетом условия $l \ll L$ получим для силы, действующей на заряд,

$$F_Q = QE_1 = -qQlf'(L)$$

или

$$F_Q = -qQl(f^{(\text{ind})})'(L) + 2qQl\frac{k}{L^3}.$$

Теперь рассмотрим случай повернутого диполя. Заряд Q и индуцированные им заряды создают на оси цилиндра поле

$$Qf^{(\text{p})}(z) + Qf^{(\text{ind})}(z) = Qf(z).$$

При смещении от оси на малое расстояние $r \ll R$ у электрического поля появится радиальная составляющая E_r . Чтобы определить ее, рассмотрим цилиндр высоты dz с радиусом основания r , ось симметрии которого совпадает с осью внешнего цилиндра. Поскольку внутри этого цилиндра нет зарядов, согласно теореме Гаусса, поток электрического поля через его поверхность равен нулю:

$$\pi r^2 Q(f(z+dz) - f(z)) + 2\pi r dz E_r = 0,$$

откуда

$$E_r(z) = -\frac{1}{2}Qrf'(z)$$

или же

$$E_r(z) = -\frac{1}{2}Qr(f^{(\text{ind})})'(z) + \frac{1}{4}Qr\frac{k}{z^3}.$$

Из симметрии задачи относительно оси цилиндра следует, что от системы, состоящей из заряда Q и индуцированных им зарядов, в точках, где расположены заряды диполя, составляющие электрического поля вдоль оси z равны, а значит, проекция суммарной силы на ось z равна 0.

Более того, из-за зеркальной симметрии системы индуцированных диполем зарядов, осевая проекция силы на диполь от них равна нулю. Силы же, создаваемые радиальными составляющими поля от индуцированных диполем зарядов, уничтожают друг друга.

Суммарная сила, действующая на диполь,

$$F_D = 2qE_r\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{2}qQlf'(L).$$

Отсюда искомое отношение

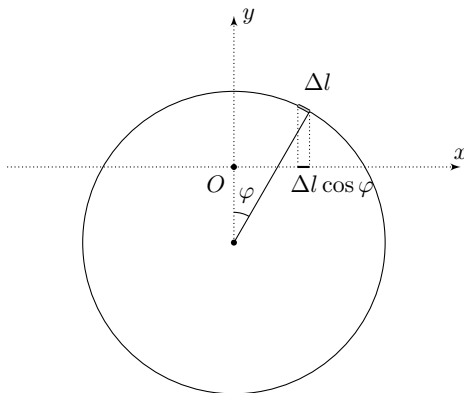
$$\frac{F_Q}{F_D} = 2$$

Задача №11-4. Кольцо на границе

На участки кольца, находящиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору скорости участка кольца. Можно рассматривать движение кольца как наложение поступательного движения в направлении вдоль границы со скоростью v_x , поступательного движения перпендикулярно границе со скоростью v_y и вращения с угловой скоростью ω .

Из-за поступательного движения в направлении y возникает момент силы Лоренца, раскручивающий кольцо. Этот момент сил исчезает только после того, как кольцо полностью окажется в области поля. Сумма сил Лоренца, действующих на участки в области поля, связанная с движением вдоль y , направлена вдоль границы и изменяет значение v_x .

Силы Лоренца, связанные с поступательным движением вдоль оси x , изменяют скорость v_y , но не создают момента сил, раскручивающих кольцо. Силы Лоренца, возникающие из-за вращательного движения кольца, как легко убедиться, действуют только вдоль y и не влияют на движение вдоль x .



Рассмотрим тангенциальную составляющую силы Лоренца, действующую на участок кольца длины Δl , связанную с v_y . Она равна $\lambda \Delta l B v_y \cos \varphi$, где φ — угол между этим участком и осью x . Величина $\Delta l \cos \varphi$ представляет собой проекцию этого участка на x , а сумма тангенциальных составляющих для всех участков, находящихся в области магнитного поля, будет равна $\lambda l_x B v_y$, где l_x — длина хорды, стягивающей концы участка кольца, находящегося в области поля. Тогда

$$mR \frac{d\omega}{dt} = \lambda B v_y l_x.$$

После домножения обеих частей уравнения на dt , с учётом того, что $v_y dt = dy$, а $l_x dy = dS$, где dS — дополнительная площадь кольца, которая оказывается в области поля за время dt , получаем

$$mRd\omega = \lambda \cdot d\Phi,$$

где $d\Phi$ — прирост потока магнитного поля через плоскость кольца.

Если кольцо полностью окажется в области магнитного поля, его угловая скорость вращения будет равна

$$\omega = \frac{\pi\lambda BR}{m}.$$

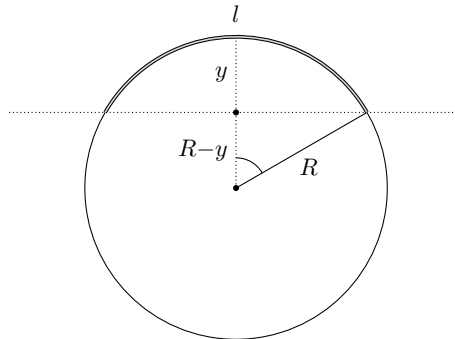
Итак, ответ на первый вопрос задачи: $\omega = \frac{\pi\lambda BR}{m}$.

Как отмечалось выше, вращение не влияет на проекцию скорости v_x , её изменение целиком определяется y -проекцией скорости центра и зарядом той части кольца (дуги длины l), которая находится в поле.

$$m \frac{dv_x}{dt} = \lambda B v_y.$$

Пусть y — координата точки кольца, наиболее удалённой от границы. Другими словами, это расстояние, на которое сместилось кольцо в направлении y от начала движения. Тогда $l = 2R \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right)$. Далее

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2\lambda B R v_y \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right).$$



Домножив на dt , переходим к интегралу

$$v_x = \frac{2\lambda BR}{m} \int_0^{2R} \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right) dy = \frac{2\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии, учитывая тот факт, что сила Лоренца работы не совершает и кинетическая энергия кольца в любой момент времени равна начальной.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи положим в этом выражении $v_y = 0$ и воспользуемся результатом ответа на первый пункт для угловой скорости. Тогда

$$v_{\min}^2 = v_x^2 + R^2\omega^2 = 5 \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m} \right)^2.$$

$$v_{\min} = \frac{\sqrt{5}\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Поскольку v_x уже найдено, то для ответа на третий вопрос достаточно определить проекцию v_y в момент, когда кольцо целиком окажется в поле.

Из закона сохранения энергии находим: $v_y = \sqrt{v_0^2 - v_x^2 - \omega^2 R^2} = \sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}$. Для тангенса искомого угла: $\tan\theta = v_y/v_x$.

Следовательно,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}}{v_x} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda BR^2} \right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

$$\theta = \arctan \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda BR^2} \right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

С момента, когда кольцо целиком оказывается в области поля его угловая скорость перестаёт меняться и центр кольца движется как точечный заряд $q = 2\pi R\lambda$ со скоростью, проекции которой равны значениям v_x и v_y в момент пересечения границы области последней точкой кольца. С этого момента

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2\pi\lambda RBv_y.$$

После уже традиционного домножения на dt и интегрирования получаем

$$\Delta y = \frac{m\Delta v_x}{2\pi\lambda RB}.$$

Здесь Δy — изменение y — координаты центра от момента полного вхождения в поле до момента максимального удаления центра от границы, Δv_x — соответствующее этим моментам времени изменение проекции скорости.

v_x в момент максимального удаления можно найти из закона сохранения энергии

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2}.$$

Тогда

$$\Delta v_x = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2} - \frac{2\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Искомое максимальное удаление:

$$y_{\max} = R + \frac{m\Delta v_x}{2\pi\lambda RB} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda RB}\right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$

Задача №11-5. RLC-метр

Отношение измеренных амплитуд напряжения и тока равно модулю импеданса $|Z|$ устройства, подключенного выводам RLC -метра. Используя известные формулы для импедансов индуктивности $Z_L = i\omega L$ и емкости $Z_C = -i/\omega C$ (где ω — циклическая частота, на которой проводятся измерения) можно определить измеренные прибором значения индуктивности и емкости. Из формул для последовательного соединения импедансов получим в первом случае

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1}. \quad (1)$$

Во втором случае используем формулу для импеданса параллельного соединения

$$\frac{L/C}{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|} = \omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2}. \quad (2)$$

Какое бы устройство не подключалось к выводам, показания прибора в режимах измерения индуктивности и емкости связаны соотношением $|Z| = \omega L_1 = 1/\omega C_1$, то есть $L_1 C_1 = 1/\omega^2$. Таким образом $L_1 C_1 = L_2 C_2$, откуда

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}.$$

$$C_2 = C_1 \frac{L_1}{L_2} \approx 0,83 \text{ мкФ}$$

Знаменатель в уравнении (2) для параллельного соединения совпадает с импедансом для последовательного соединения, поэтому

$$\frac{L}{C \cdot \omega L_1} = \omega L_2.$$

Подставляя в это соотношение значение $\omega^2 = 1/L_1 C_1$, найдем

$$\frac{L}{C} = \frac{L_2}{C_1}.$$

Выражая отсюда C_1 и подставляя в уравнение (1), получим

$$\left| L - \frac{1}{\omega^2 C} \right| = \left| L - \frac{L_1 L_2}{L} \right| = L_1.$$

Отсюда

$$|L^2 - L_1 L_2| = L_1 L,$$

значит L удовлетворяет одному из двух квадратных уравнений

$$L^2 - L_1 L_2 = \pm L_1 L,$$

откуда

$$L^2 \mp L_1 L - L_1 L_2 = 0.$$

Корни этих двух уравнений имеют вид

$$L = \frac{\pm L_1 \pm \sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2}}{2},$$

где первый знак определяется знаком $\pm$ в уравнении, а второй — выбранным корнем квадратного уравнения. При этом индуктивность должна быть положительной, поэтому перед квадратным корнем всегда нужно выбирать знак $+$. Итого получаем, что возможны два значения индуктивности

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1}{2},$$

отвечающие двум разным способам раскрыть модуль. Отвечающие им значения емкости можно найти как

$$C = L \frac{C_1}{L_2} = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1 \right) = \frac{2C_1 L_1}{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \mp L_1}.$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} + L_1}{2} = 15,0 \text{ мГн}; \quad C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} + L_1 \right) = 2,00 \text{ мкФ}$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} - L_1}{2} = 8,80 \text{ мГн}; \quad C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} - L_1 \right) = 1,17 \text{ мкФ}$$

Комплексный импеданс неидеальной катушки равен

$$Z'_L = R + i\omega L,$$

тогда измеренное значение индуктивности определяется из соотношения

$$\omega L_{\text{exp}} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad L_{\text{exp}} = \sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}}.$$

Видим, что это значение всегда больше значения индуктивности катушки, и в пределе больших частот стремится к ней. Тогда частота должна быть больше некоторой критической частоты, которую можно найти из условия, что $L_{\text{exp}} = L(1 + \delta)$, где δ – максимально допустимая погрешность:

$$\sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}} < L(1 + \delta),$$

откуда с учетом малости δ

$$\frac{R^2}{\omega_c^2} = L^2((1 + \delta)^2 - 1) \approx 2\delta L^2.$$

Получаем критическое значение циклической частоты

$$\omega_c = \frac{R}{L\sqrt{2\delta}},$$

и критическое значение частоты

$$f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}}.$$

$$f > f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}} = 1780 \text{ Гц}$$

Импеданс цепи равен

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}.$$

Приравнявая его модуль к ωL_1 , найдем измеренную индуктивность L_1 :

$$\omega L_{\text{exp}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

отсюда

$$L_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{R^2}{(2\pi f)^2} + \left(L - \frac{1}{(2\pi f)^2 C}\right)^2}.$$

Проанализируем полученное выражение. При больших частотах слагаемые с частотой в знаменателе стремятся к 0, поэтому измеренное значение индуктивности стремится к постоянной $L_{\text{exp}} \approx L$. При малых частотах наибольшее значение у слагаемого с наибольшей степенью частоты в знаменателе, поэтому

$$L_{\text{exp}} \approx \frac{1}{(2\pi f)^2 C}.$$

Покажем, что у подкоренного выражения есть минимум при промежуточном значении частоты. Для удобства введем вспомогательную переменную $x = 1/(2\pi f)^2$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = xR^2 + \left(L - \frac{x}{C}\right)^2.$$

Ее производная обращается в 0 при

$$R^2 + \frac{2}{C} \left(\frac{x}{C} - L\right) = 0,$$

откуда

$$x = LC - \frac{R^2 C^2}{2} = LC \left(1 - \frac{R^2 C}{2L}\right).$$

Этому значению x отвечает значение частоты

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}\sqrt{1 - R^2 C/2L}},$$

которое существует при $R^2 C/2L < 1$. Это значение отвечает минимуму рассматриваемой функции, поскольку она представляет собой квадратичную зависимость с положительным коэффициентом перед x^2 . Соответствующее значение индуктивности в минимуме

$$L_0 = R\sqrt{CL - \frac{R^2 C^2}{4}}.$$

Для чисел, приведенных в условии

$$f_0 = 1590 \text{ Гц}, \quad L_0 = 0,50 \text{ мГн}.$$

