

# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ 2025-26

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

#### 10-11 класс

#### Профиль «Робототехника»

#### Ответы, Решения, ключи и методика оценивания.

По теоретическому туру максимальная оценка результатов участника 10 и 11 класса определяется арифметической суммой всех баллов, полученных за выполнение заданий и не должна превышать 40 баллов. Задачи для 10 и 11 классов одинаковые. Каждый ответ оценивается либо как правильный (полностью совпадает с ключом - ответом), либо как неправильный (отличается от ключа или отсутствует). Каждый правильный ответ имеет свой вес: 2 балла, 4 балла, 7 баллов.

В общей части даны следующие задачи:

| Задача | Ответ - ключ | Оценка |
|--------|--------------|--------|
| 10-01  | 7            | 5      |
| 10-02  | 480          | 1      |
| 10-03  | 174          | 2      |
| 10-04  | 6            | 5      |
| 10-05  | 1023         | 3      |
| 10-06  | 401          | 3      |
| 10-07  | 24           | 3      |
| 10-08  | 39           | 3      |
| 10-09  | 0            | 1      |
| 10-10  | 112          | 1      |
| 10-11  | 12           | 1      |
| 10-12  | 0            | 1      |
| 10-13  | 56           | 1      |

Участник должен внести ответы в бланк ответов и должен внести решения задач в странички, маркированные кодом работы. Каждая решенная задача должна иметь как ответ, так и решение. При наличии правильного ответа в бланке ответов, но отсутствия решения или если в странице с решением ответ отличается от ответа в бланке ответов, оценка за задачу может быть аннулирована.

#### Общие задачи

**Задача 10-01. Навигация. 5 баллов.**

**Условие:**

Робот оборудован лидаром и инерциальным измерительным устройством (IMU). Эта комбинация оборудования позволяет ему измерять азимуты на интересующие объекты относительно абсолютного нулевого направления на земле.

Абсолютное нулевое направление на земле совпадает с направлением положительной оси X на горизонтальной плоскости в системе координат на земле с точностью 1 градус.

Робот измерил азимуты (Yaw) двух маяков. В стандартной декартовой системе координат Yaw измеряется в градусах против часовой стрелки. Координаты и номера маяков роботу известны. По измерениям азимутов на два маяка робот может рассчитать собственную позицию на оси X.

Маяк №1: X = 10 м, Y=-0.5 м,

Маяк №2: X = 10 м, Y=0.5 м

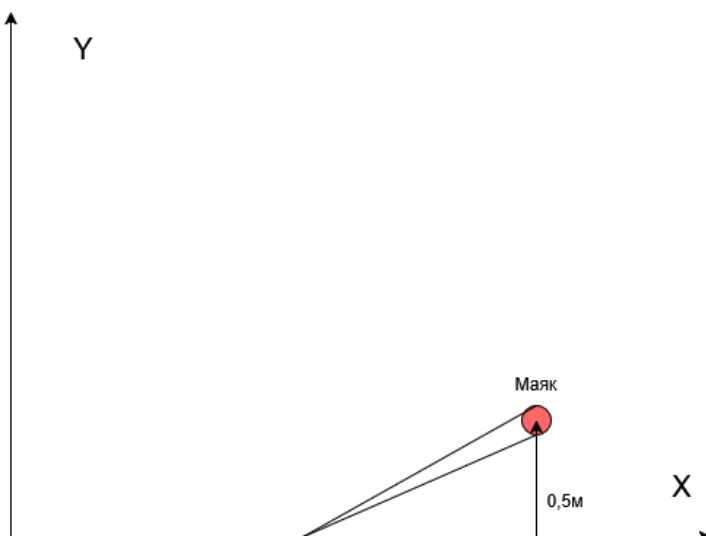
Размер самого маяка 0.05 м. На близком расстоянии от маяка точность измерения азимута снижается, так как размер маяка размывает точность определения азимута.

Робот движется вдоль оси X от начала координат по направлению к маякам.

Найти координату X, на которой точность определения собственной позиции наивысшая.

Ответ округлить до целых метров.

**Решение:**



1 градус = 0,017 радиан

При движении робота от начала координат точность определения собственной координаты X растёт, так как абсолютная величина азимута растёт.

Если L – расстояние до маяка, а  $\alpha$  – азимут, то

$$L * \sin \alpha = 0,5$$

$$L = 0,5 / \sin \alpha$$

$$\Delta L = 0,5 * (1 / \sin(\alpha) - 1 / \sin(\alpha + 0,017)) = 0,5 * (2 * \sin(0,017/2) * \cos(\alpha + 0,017/2) / (\sin(\alpha) * \sin(\alpha + 0,017))) \sim K * \cos(\alpha) / \sin^2(\alpha)$$

Таким образом погрешность измерения расстояния до маяка уменьшается по мере роста величины  $\sin \alpha$ .

Однако при приближении к маякам растёт угловой размер маяка  $\sim 0,05 / L$ , а также погрешность, связанная с размытием азимута.

Наивысшая точность получается в точке, где угловой размер маяка становится равен погрешности измерения азимута.

$$0,05 / L = 0,017$$

$$L = 0,05 / 0,017 = 2,94 \text{ м}$$

$L$  – гипотенуза треугольника, в которой один из катетов равен 0,5 м

Второй катет треугольника равен  $\sqrt{L^2 - 0,5^2} = 2,9$  м

Координата  $X$  в этой точке равна  $10 - 2,9 = 7,1$  м

**Ответ: 7**

### **Задача 10-02. Компьютерное зрение. 1 балл.**

**Условие:**

В популярной библиотеке OpenCV центр координат матрицы изображения принято размещать в левом верхнем углу. При этом положительные значения оси  $X$  направлены вправо, а положительные значения оси  $Y$  направлены вниз. Параметрическое представление прямой на изображении состоит из двух величин  $(\rho, \theta)$ :  $\theta$  – theta – [тетта] – выражается в радианах и обозначает угол наклона нормали к линии. Нормаль – это отрезок, который перпендикулярен к линии и один конец которого находится в центре координат, а другой находится на линии. 0 радиан – это вертикальная линия,  $\pi/2$  радиан – это горизонтальная линия. Углы  $\theta$  исчисляются от положительной оси  $X$  по часовой стрелке.

$\rho$  – rho – [ро] – расстояние от начала координат до ближайшей точки на линии или длина нормали.

$\rho > 0$ , если нормаль находится справа от оси  $Y$ ,

$\rho < 0$ , если нормаль находится слева от оси  $Y$

Матрица изображения размерами в пикселях  $(w, h) = (640, 480)$ , где  $w$  – это ширина,  $h$  – это высота матрицы, состоит из бинарных пикселей. Бинарный пиксель может иметь или яркость 0 (черный цвет) или яркость 1 (белый цвет).

На черной бинарной матрице изображения белыми пикселями проведен растровый отрезок, который является частью линии с параметрами  $(350, \pi/4)$ . Растровый отрезок – это отрезок толщиной в один пиксель, в котором каждый пиксель

соседствует со следующим пикселем или по вертикали, или по горизонтали или по диагонали. Из скольких белых пикселей состоит отрезок?

**Решение:**

Линия пересекает ось X в точке, где  $x = 350 * \sqrt{2} = 495$

Линия пересекает ось Y в точке, где  $y = 350 * \sqrt{2} = 495$ .

Поскольку  $495 > 480$ , то общая высота отрезка равна 480, так же, как и ширина. То есть отрезок состоит из пикселей, которые соединены друг с другом по диагонали. Число пикселей равно максимуму между шириной и высотой. Итого 480.

**Ответ: 480**

**Задача 10-03. Механика. 2 балла.**

**Условие**

Ты проектируешь робота, поднимающего детали на конвейере. Робот имеет плечо, на конце которого находится захват.

Исходные данные:

- Длина плеча:  $L = 300$  мм.
- Масса захвата с грузом:  $m = 0,5$  кг.
- Максимальное ускорение захвата:  $a_{\text{max}} = 50$  м/с<sup>2</sup>.

Привод:

- Передаточное число редуктора привода:  $i = 100$ .
- Момент инерции ротора двигателя:  $J_{\text{рот}} = 0,0001$  кг\*м<sup>2</sup>.

Вопрос:

Оценивая момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя, считать, что вся масса ( $m$ ) сосредоточена на конце рычага длиной  $L$ .

В момент начала движения с максимальным ускорением  $a_{\text{max}}$  для подъёма детали, рассчитай динамический момент (момент сил для разгона), который должен развить двигатель на валу для обеспечения ускорения  $a_{\text{max}}$ , без учёта сил тяжести и трения.

Ответ запиши в Н\*см и округли до целых.

**Ответ: 174**

**Решение**

Дано:

$$m = 0,5 \text{ кг}$$

$$a_{\text{max}} = 50 \text{ м/с}^2$$

$$L = 0,3 \text{ м}$$

$$i = 100$$

$$J_{\text{рот}} = 0,0001 \text{ кг*м}^2$$

- Момент инерции нагрузки, приведённый к валу двигателя:

Считаем, что масса  $m$  закреплена на конце рычага длиной  $L$ . Момент инерции этой массы относительно оси привода (оси "плеча"):

$$J_{\text{нагр}} = m * L^2 = 0,5 \text{ кг} * (0,3 \text{ м})^2 = 0,5 * 0,09 = 0,045 \text{ кг*м}^2.$$

Этот момент инерции приведён к оси вращения рычага. Чтобы привести его к валу двигателя, который вращается в  $i$  раз быстрее, нужно разделить на квадрат передаточного числа:

$$J_{\text{прив}} = J_{\text{нагр}} / i^2 = 0,045 \text{ кг*м}^2 / (100^2) = 0,045 / 10000 = 0,0000045 \text{ кг*м}^2.$$

- Динамический момент на валу двигателя:

Угловое ускорение вала двигателя  $\varepsilon_{\text{дв}}$  связано с линейным ускорением  $a_{\text{тах}}$  и длиной рычага  $L$ :  $a_{\text{тах}} = \varepsilon_{\text{рыч}} * L$ , где  $\varepsilon_{\text{рыч}}$  — угловое ускорение рычага.

$$\varepsilon_{\text{рыч}} = a_{\text{тах}} / L = 50 / 0,3 \approx 166,7 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение вала двигателя в  $i$  раз больше:

$$\varepsilon_{\text{дв}} = \varepsilon_{\text{рыч}} * i = 166,7 * 100 = 16670 \text{ рад/с}^2.$$

Полный момент инерции на валу двигателя:

$$J_{\text{полн}} = J_{\text{рот}} + J_{\text{прив}} = 0,0001 + 0,0000045 \approx 0,0001045 \text{ кг*м}^2.$$

Динамический момент (момент для разгона инерции):

$$M_{\text{дин}} = J_{\text{полн}} * \varepsilon_{\text{дв}} = 0,0001045 \text{ кг*м}^2 * 16670 \text{ рад/с}^2 \approx 1,74 \text{ Н*м}.$$

Если выразить в Н\*см, то получим  $\approx 174 \text{ Н*см}$ .

#### **Задача 10-04. Механика. 5 баллов.**

##### **Условие:**

Ты проектируешь автономного колесного робота для механической прополки междурядий на поле с овощными культурами (например, морковью). Робот отличает культурное растение от сорняка и удаляет сорняк, срезая его стебель.

Исходные данные

- Сорняк:

Диаметр стебля сорняка у земли:  $d_{\text{сорн}} = 0,005 \text{ м}$ .

- Робот:

Рабочий орган: вращающийся бритвенный диск (фреза) диаметром  $D_{\text{фр}} = 0,12 \text{ м}$ .

- Механика удаления сорняка:

Для срезания сорняка фрезой требуется усилие резания на один стебель:  $F_{\text{рез}} = 2 \text{ Н}$ .

Рассмотри следующий режим срезания сорняка фрезой.

1. Рассчитай окружную скорость  $v_{\text{окр}}$  фрезы, необходимую для того, чтобы обеспечить время взаимодействия лопасти со стеблем сорняка  $t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ с}$  (для чистого среза).

Найди частоту вращения  $\omega$ .

2. Рассчитай момент сопротивления  $M_{\text{сопр}}$  на валу фрезы при одновременном срезании  $N=3$  сорняков, считая, что сила  $F_{\text{рез}}$  приложена на радиусе  $R_{\text{фр}} = D_{\text{фр}} / 2$ .

Оцени мощность на валу фрезы. Ответ запиши в Вт и округли до целых.

**Ответ: 6**

Решение:

Дано:

$$D_{\text{фр}} = 0,12 \text{ м} \rightarrow R_{\text{фр}} = 0,06 \text{ м}$$

$$t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ с}$$

$$F_{\text{рез}} = 2 \text{ Н}$$

$$N = 3$$

$$d_{\text{сорн}} = 0,005 \text{ м}$$

Окружная скорость и частота вращения:

Чтобы лопасть прошла путь, равный толщине стебля  $d_{\text{сорн}}$ , за время  $t_{\text{вз}}$ , нужна скорость:  $v_{\text{окр}} = d_{\text{сорн}} / t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ м} / 0,005 \text{ с} = 1 \text{ м/с}$ .

$$v_{\text{окр}} = \omega * R_{\text{фр}}$$

Частота вращения:

$$\omega = v_{\text{окр}} / R_{\text{фр}} = 1 / 0,06 \approx 16,67 \text{ рад/с}.$$

Момент сопротивления:

$$\text{Момент от срезания одного сорняка: } M_1 = F_{\text{рез}} * R_{\text{фр}} = 2 \text{ Н} * 0,06 \text{ м} = 0,12 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$\text{При одновременной работе с 3 сорняками: } M_{\text{сопр}} = N * M_1 = 3 * 0,12 = 0,36 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Мощность:

$$\text{Механическая мощность на фрезе: } P_{\text{фр}} = M_{\text{сопр}} * \omega = 0,36 \text{ Н}\cdot\text{м} * 16,67 \text{ рад/с} \approx 6 \text{ Вт}.$$

**Задача 10-05. Алгоритмы. 3 балла.**

**Условие**

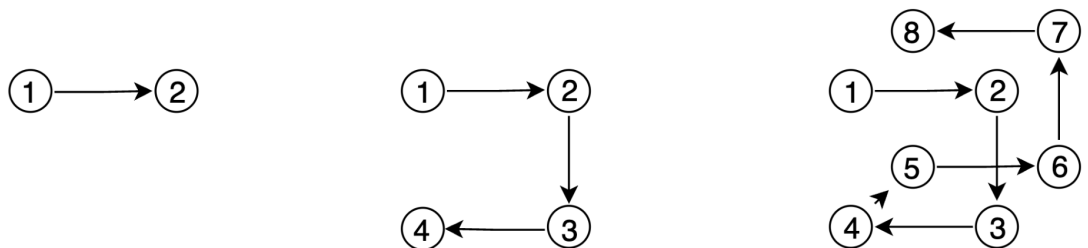
Одномерный бинарный куб состоит из двух вершин - 0 и 1. Двумерный из четырех - 00, 01, 10, 11. Вы находитесь в некоторой вершине десятимерного куба. За один ход вы можете перейти в вершину, кодировка которой отличается от кода текущей в одном бите. За какое минимальное число ходов можно побывать во всех вершинах этого десятимерного куба?

**Решение**

Куб размерности  $d = 1$  (одномерный) обходится за  $2^1 - 1 = 1$  ход.

Куб размерности  $k+1$  обходится следующим образом. Обходим его подкуб размерности  $k$ , у всех вершин которого в кодировке первым символом стоит 0, потом за один ход переходим в другой подкуб (кодировка всех вершин которого начинается с 1) и делаем обход в обратную сторону. Если для обхода куба размерности  $k$  нужно  $A$  ходов, для обхода куба размерности  $k+1$  нужно  $2A + 1$  действий.

Поскольку для одномерного нужно 1 действие, для  $k$ -мерного нужно  $2^k - 1$ . Таким образом, ответ задачи  $2^{10} - 1 = 1023$ .



**Ответ: 1023**

#### Задача 10-06. Алгоритмы. 3 балла.

В этой задаче нумерация в массиве с нуля.

В алгоритмах есть понятие префиксной суммы. Для массива  $a [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  это массив  $p = [0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n]$ . Такой массив позволяет находить суммы элементов с  $k$ -го по  $m$ -й за одну операцию вычитания:

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_m = p_{m+1} - p_k$$

Обобщите префиксные суммы на двумерные массивы.

Предположим, что в практической задаче возникла необходимость искать среднее значение яркости в части изображения. Изображения FullHD (1920x1080), часть изображения, в которой нужно найти среднее, всегда в двадцать раз меньше полного по каждой оси.

Есть два варианта, как можно действовать. Первый вариант – просто считать сумму в двойном цикле, а затем разделить на число пикселей. Второй вариант – посчитать массив префиксных сумм, а затем использовать более быстрый вариант нахождения суммы, после чего тоже разделить на число пикселей. Второй вариант имеет смысл использовать, когда нужно многократно находить средние. Найдите минимальное число операций поиска среднего, при котором использование второго подхода приведет к меньшему числу операций работы с массивами.

Операцией с массивом считается запись в ячейку или считывание из ячейки.

**Решение:**

$n$  – число запросов.

Первый вариант =  $n * 96 * 54$

Второй вариант =  $1921 * 1081 + n * 4$

Нужно найти минимальное такое  $n$ , что  $n * 96 * 54 > 1921 * 1081 + n * 4$

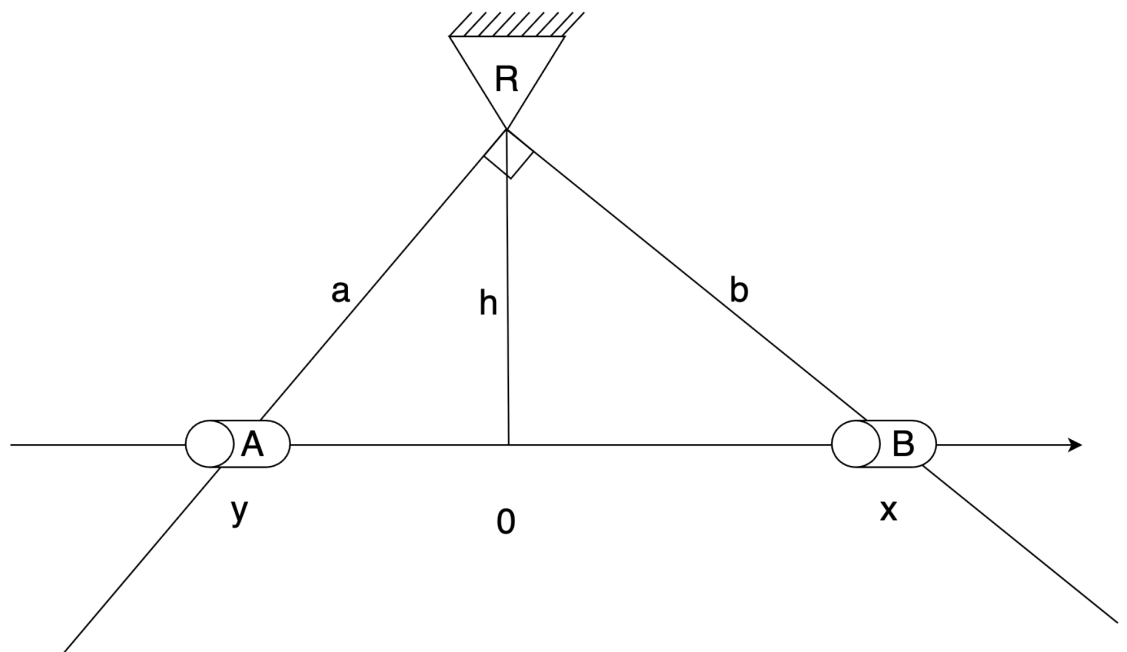
Это 401

**Ответ: 401**

**Задача 10-07. Теория управления. 3 балла.**

**Условие**

Рассмотрим следующую механическую систему



Горизонтальная направляющая, обозначенная стрелкой вправо, неподвижна в лабораторной системе отсчета, как и крепление R. Втулки A и B свободно скользят по направляющей. Угол между AR и BR всегда составляет 90 градусов, то есть ARB – это прямоугольный треугольник в каждый момент времени.

Пусть моментальная длина RA равна  $a$ , моментальная длина RB равна  $b$ .

На направляющей нанесены сантиметровые отметки, в точке 0 стоит отметка 0, ось направлена вправо, высота  $h$  составляет 40 см.

Точка A начинает движение вправо из координаты -200 со скоростью 10 см/с и движется в течение 15 секунд. Какой путь преодолеет точка B?

## Решение

Покажем, что эта система реализует обращение числа, то есть  $x = \frac{c}{y}$  для некоторой константы  $C$ .

Обозначим RA как  $a$ , RB как  $b$ .

- a. по теореме Пифагора  $x - y = \sqrt{a^2 - b^2}$
- b. по теореме Пифагора  $b^2 = h^2 + x^2$
- c. Из подобия треугольников BAR и BR0

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{h}$$

и как следствие  $\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{ab}{h}$

- d. Из подобия треугольников BR0 и RA0

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{h}$$

и как следствие  $a = \frac{bh}{x}$

Выразим  $y$  через  $x$ .

$$y = x - \sqrt{a^2 - b^2} = x - \frac{ab}{h} = x - \frac{hb^2}{hx} = x - \frac{b^2}{x} = x - \frac{h^2 + x^2}{x} = x - \frac{h^2}{x} - x = -\frac{h^2}{x}$$

Следовательно,  $x = -\frac{h^2}{x}$

Начальное значение  $x$  равно  $-1600 / (-200) = 8$

Конечное значение  $y$  равно  $-200 + 10 * 15 = -50$

Конечное значение  $x$  равно  $-1600 / (-50) = 32$

Путь, пройденный В, равен  $32 - 8 = 24$  см

**Ответ: 24**

## Задача 10-08. Алгоритмы компьютерного зрения. 3 балла.

### Условие

RANSAC (Random Sample Consensus) – итеративный алгоритм оценки параметров математической модели из данных, содержащих значительное количество выбросов. Был предложен в 1981 году Фишлером и Боллесом.

Алгоритмом RANSAC можно провести наилучшую прямую через набор точек, среди которых есть точки, появившиеся в результате наложения шума на измерения.

При реализации алгоритма следует набор точек разделить на точки, которые соответствуют критериям выбора (inliers) и на точки, которые не соответствуют критериям выбора (outliers) – как правило это и есть шум.

Дан набор измерений из следующих точек в координатной системе (X;Y):

- 1) (3;1)
- 2) (4;6)
- 3) (5;4)
- 4) (4;2)

Нужно проверить соответствие точек прямой, которая выражается формулой:

$$Y = 1.5 * X - 3$$

Для этого нужно рассчитать отклонение точки от прямой, которое равно кратчайшему расстоянию от точки до прямой. Затем надо отбросить те точки, которые имеют отклонение больше, чем среднеквадратичное отклонение, они относятся к группе outlier. Из оставшихся точек надо рассчитать среднеквадратичное отклонение точек, вошедших в группу inlier. Ответ – это среднеквадратичное отклонение точек из группы inlier от прямой, умноженное на 100 и округлённое.

### Решение

Формула расчета кратчайшего расстояния от точки (x,y) до прямой  $y = ax + b$ :

$$d = \frac{|ax - y + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

итого имеем для точек:

$$d1 = \frac{|1.5*3 - 1 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 0.5 / 1.8 \sim 0.278$$

$$d2 = \frac{|1.5*4 - 6 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 3 / 1.8 \sim 1.667$$

$$d3 = \frac{|1.5*5 - 4 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 0.5 / 1.8 \sim 0.278$$

$$d4 = \frac{|1.5*4 - 2 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 1 / 1.8 \sim 0.556$$

среднеквадратичное отклонение

$$D_0 = \sqrt{\frac{(d1^2 + d2^2 + d3^2 + d4^2)}{4}} \sim 0.9$$

Видно, что вторая точка попала в outliers, остальные в группе inliers.

Считаем среднеквадратичное отклонение inliers:

$$D_0 = \sqrt{\frac{(d1^2 + d3^2 + d4^2)}{3}} \sim 0.393$$

**Ответ: 39**

**Задача 10-09. Навигация. 1 балл.**

Рover с лидаром едет из точки (0, 0) в точку (50, 50) по кратчайшему пути со скоростью 5 м/с. Лидар фиксирует расстояние и направление положения объектов. Находясь в точке (0,0) лидар, зафиксировал объект на расстоянии  $50\sqrt{2}$  по направлению движения rovera, также известно, что начальная скорость зафиксированного объекта была 0 м/с и движется он по вертикальной оси с постоянным ускорением. В точке (25, 25) rover повторно зафиксировал объект, угол между направлением движения rovera и направления на объект  $\varphi$ ,

$$\operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi) = 0.5$$

Найти ускорение неопознанного летающего объекта, ответ записать в м/с<sup>2</sup>. Координаты даны в метрах

### Решение:

1) Для того, чтобы найти ускорение летающего объекта необходимо найти пройденное время и расстояние, чтобы воспользоваться формулой  $S = at^2/2$  между первой и второй фиксацией лидаром.

2) Время будет равняться  $t = 5\sqrt{2}$  т.к. была пройдена половина расстояния до конечной точки в противоположной вершине квадрата.

$$\operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi) = 0.5$$

$$\varphi = \pi/4 - \operatorname{arctg}(0.5)$$

3) Вычисляем S. Нам известен тангенс в прямоугольном треугольнике с катетом  $25\sqrt{2}$ , необходимо найти второй катет.

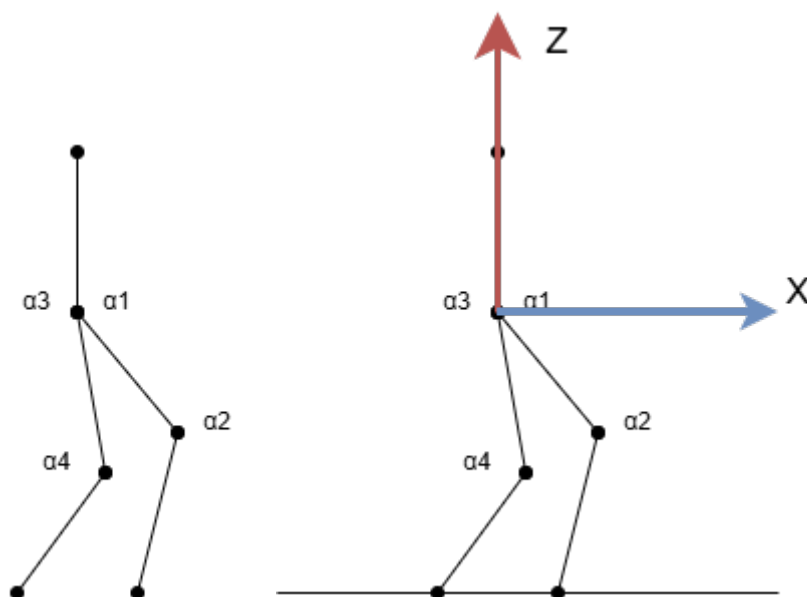
$$S = (25\sqrt{2}) * \operatorname{tg}(\pi/4 - \operatorname{arctg}(0.5)) = 25\sqrt{2} * 0,333 = 11,79$$

Получаем катет, равный 11,79 метров.

$$4) a = 2S / t^2 = 2 * 11,79 / 50 = 0,4716 \text{ м/с}^2$$

**Ответ: 0**

**Задача 10-10. Гуманоидная робототехника. 1 балл.**



Пятизвенный плоский шагающий гуманоидный робот – это упрощённая виртуальная модель робота, на которой удобно проверять математические и алгоритмические основы прямохождения. Робот состоит из 5 звеньев одинаковой длины равной единице. Вес робота распределен таким образом, что центр масс находится в точке соединения 3-х звеньев, когда робот выпрямлен в позу «смирно». Для упрощения вычислений следует пренебречь изменением позиции точки центра масс при изменении позы робота. Все процессы происходят в одной плоскости, поэтому ось Y отсутствует. Робот снабжен 4 сочленениями, в которых установлены вращающиеся актуаторы, позиционные углы которых обозначаются  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Если  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , то робот выпрямлен в одну прямую линию, в позу «смирно», и выглядит как три последовательно соединённых отрезка.  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – это позиция бедра и колена правой ноги,  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  – это позиция бедра и колена левой ноги. Позиции актуаторов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  принимают положительные угловые значения, если находятся по направлению движения часовой стрелки от нуля.  $\alpha_1, \alpha_3$  могут принимать как положительные значения, так и отрицательные значения.  $\alpha_2$  и  $\alpha_4$  не могут принимать отрицательные значения. У робота есть своя система координат, которая привязана к корпусу таким образом, что пересечение осей X и Z находится в точке соединения 3-х звеньев, а ось Z параллельна верхнему звену (корпусу).

Правая стопа робота должна занять точку с координатами  $x = 0,7; z = -0,6$ .

Какой угол должен принять  $\alpha_1$ ? Ответ округлить до целых градусов и умножить на -1.

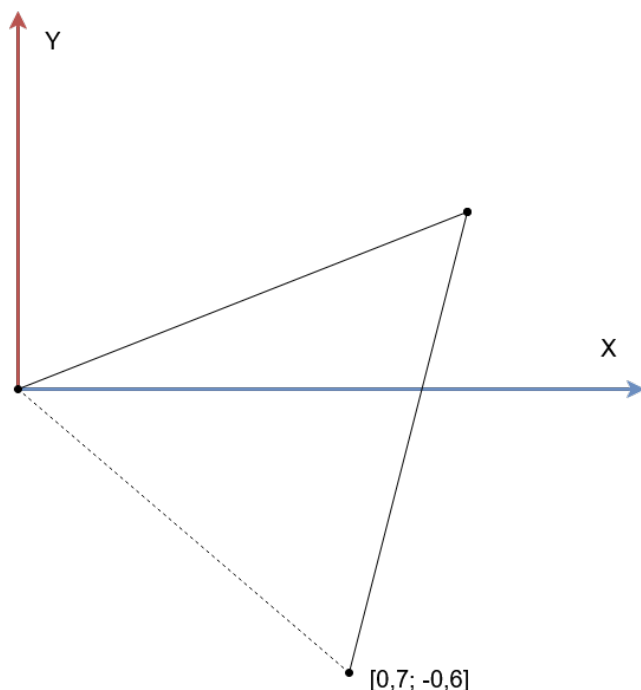
**Ответ: 112**

**Решение.**

Проведем линию, соединяющую тазобедренный сустав со стопой. Это основание равнобедренного треугольника.

Расстояние от  $[0;0]$  до  $[0,7; -0,6]$  равно 0.922, поэтому  $\alpha_2 = 125^\circ$ .

$\alpha_1 = \arctg(0,7 / 0,6) + \alpha_2 / 2 = 49.4 + 62.5 = -112^\circ$ .



#### Задача 10-11. Летательная робототехника. 1 балл.

Сопротивление у беспилотных летательных аппаратов самолётного типа складывается из двух основных составляющих: сопротивления трения ( $X_0$ ) и индуктивного сопротивления, возникающего из-за подъёмной силы (коэффициент индуктивного сопротивления выражается формулой  $C_{xi} = C_y^2 / (\pi * \lambda)$ ). Определите на какой скорости должен лететь беспилотник в горизонтальном полёте, чтобы достичь максимального аэродинамического качества, определяемого как отношение подъёмной силы ( $Y = C_y * (\rho v)^2 / 2$ ) к силе сопротивления ( $X = C_x * (\rho v)^2 / 2$ ). Где  $C_x$  и  $C_y$  безразмерные коэффициенты силы сопротивления и подъёмной силы. Известно, что самолёт имеет массу 10 кг, плотность воздуха на высоте полёта  $1.3 \text{ кг/м}^3$ , крыло имеет площадь  $0.03 \text{ м}^2$ , удлинение  $\lambda = 12$ , а коэффициент сопротивления трения  $C_{x0} = 0.02$ . Выразите скорость в м/с и округлить до целых,  $g$  принять за  $10 \text{ м/с}^2$ ,  $\pi = 3.14$

#### Решение

Выражаем формулу аэродинамического качества через коэффициенты сопротивления  $K = Y/X = C_y/C_x = C_y/(C_{x0} + C_{xi}) = C_y/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda))$

Берём производную по  $C_y$  с целью определения экстремума.

$$K' = (C_y/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda)))' = \\ (C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda) - 2C_y^2/(\pi * \lambda))/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda))^2 = \\ (C_{x0} - C_y^2/(\pi * \lambda))/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda))^2 = 0$$

$$\text{Получаем } C_y = \sqrt{C_{x0} \pi \lambda}$$

$$\text{По второму закону Ньютона } Y = mg = C_y(\rho v)^2/2 = \sqrt{C_{x0} \pi \lambda} (\rho v)^2/2$$

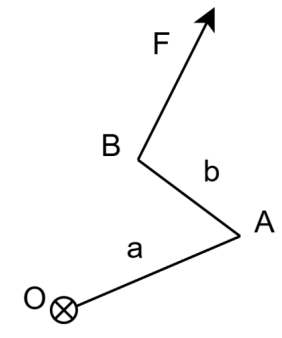
$$\text{Скорость равна } v = \sqrt{\left(\frac{2mg \sqrt{C_{x0} \pi \lambda}}{\rho}\right)} = 11,56 \text{ м/с} = 12 \text{ м/с}$$

**Ответ: 12**

**Задача 10-12. Манипуляторы. 1 балл.**

**Условие:**

Манипулятор, состоящий из двух звеньев длины  $a = 40$  см и  $b = 30$  см, вращается в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2$  рад/с относительно оси, проходящей через точку  $O$ . В захвате в точке  $B$  находится груз. Масса груза с захватом равна  $m = 1$  кг. На захват с грузом действует центробежная сила. Найти минимальный момент сил в приводе в точке  $A$ , необходимый для удержания груза с захватом, если угол  $OAB$  равен  $\beta = 60$  градусов. Ответ вырази в Н\*м, округлив до целых.



**Ответ: 42**

**Решение:**

Формула для центробежной силы:  $F = m * \omega^2 * R$ .

Найдем  $R = OB$  из теоремы косинусов для треугольника:

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \beta = 40^2 + 30^2 - 2 * 40 * 30 * \cos 60 = 1300 \text{ см}^2.$$

$$R = \sqrt{1300} \approx 36,05 \text{ см} \approx 0,36 \text{ м}.$$

$$\text{Центробежная сила: } F = m * \omega^2 * R \approx 1 * 2^2 * 0,36 \approx 1,44 \text{ Н}.$$

Найдем плечо  $h$  силы  $F$  относительно точки  $A$ .

Для площади треугольника  $OAB$  справедливо:

$$S = 0.5 * a * b * \sin \beta = 0.5 * 40 * 30 * \sin 60 \approx 519,61 \text{ см}^2.$$

С другой стороны площадь треугольника равна  $S = 0.5 * R * h$ , откуда:

$$h = 2 * S / R \approx 2 * 519,61 / 36,05 \approx 28,82 \text{ см} \approx 0,29 \text{ м}.$$

Момент силы центробежной силы относительно точки  $A$  равен:

$$M = F * h \approx 1,44 * 0,29 \approx 0,4182 \text{ Н*м}.$$

После округления до целых, получим:  $M \approx 0 \text{ Н*м}$ .

**Задача 10-13. Колёсная робототехника. 1 балл.**

**Условие:**

Ты – главный инженер проекта по созданию автономного колесного робота для круглосуточного патрулирования промышленной зоны. Робот должен работать в любую погоду, объезжать препятствия и иметь большой запас хода.

Исходные данные:

Масса шасси с базовой электроникой:  $m_{\text{шасси}} = 80$  кг.

Коэффициент трения качения (на асфальте):  $\mu_{\text{кач}} = 0,04$ .

Коэффициент лобового сопротивления:  $C_x = 0,9$ ; площадь Миделя:  $A = 1,2$  м<sup>2</sup>

Плотность воздуха:  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>

Ускорение свободного падения:  $g \approx 10$  Н/кг.

Сила аэродинамического сопротивления воздуха рассчитывается как:

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2.$$

Средняя скорость патрулирования:  $v_{\text{ср}} = 6$  км/ч  $\approx 1,67$  м/с.

Рассчитай силу сопротивления качению  $F_{\text{кач}}$  и силу аэродинамического сопротивления  $F_{\text{возд}}$  при скорости патрулирования  $v_{\text{ср}}$ , и найди суммарную силу сопротивления.

Рассчитай и запиши в ответе минимальную механическую мощность на колесах  $P_{\text{мех}}$ , необходимую для движения по асфальту с постоянной скоростью  $v_{\text{ср}}$ . Ответ вырази в Вт, округлив до целых.

**Ответ: 56**

**Решение:**

Дано:

$$m_{\text{шасси}} = 80 \text{ кг}$$

$$v_{\text{ср}} = 1,67 \text{ м/с}$$

$$\mu_{\text{кач}} = 0,04$$

$$C_x = 0,9, A = 1,2 \text{ м}^2, \rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$$

$$g \approx 10 \text{ Н/кг}$$

Силы сопротивления:

$$F_{\text{кач}} = \mu_{\text{кач}} * m * g = 0,04 * 80 \text{ кг} * 10 \text{ Н/кг} = 32 \text{ Н.}$$

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2 = 0,5 * 0,9 * 1,2 * 1,2 * (1,67)^2 \approx 0,5 * 0,9 * 1,2 * 1,2 * 2,79 \approx 1,81 \text{ Н.}$$

$$\text{Суммарная сила сопротивления (на асфальте): } F_{\text{сум}} = 32 + 1,81 \approx 33,8 \text{ Н.}$$

Механическая мощность на колесах:

$$P_{\text{мех}} = F_{\text{сум}} * v_{\text{ср}} = 33,8 \text{ Н} * 1,67 \text{ м/с} \approx 56,4 \text{ Вт.}$$

После округления до целых:  $P_{\text{мех}} \approx 56$  Вт.