Максимальное количество баллов за олимпиаду — 56

Задание 1. Вариант 1.

На спортивных соревнованиях по энерджиболу матч длится 60 минут, а на поле одновременно присутствуют 5 игроков. В составе команды «Альфа» 8 игроков. Тренер команды хочет, чтобы все игроки провели на поле одинаковое количество времени. Сколько времени каждый игрок должен провести на поле?

Ответ:

✓ 37 минут 30 секунд
- 27 минут
- 27 минут 30 секунд
- 30 минут
- 30 минут 30 секунд
- 37 минут
- 42 минуты
- 42 минуты 30 секунд

Решение. Каждый из 5 игроков провёл на поле 60 минут, значит, всего на матч одна команда получает $5 \cdot 60 = 300$ человеко-минут. Это число нужно разделить поровну на 8 человек. $300/8 = 37{,}5$ или 37 минут 30 секунд должен провести на поле каждый из 8 игроков.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 2.

На спортивных соревнованиях по энерджиболу матч длится 44 минуты, а на поле одновременно присутствуют 5 игроков. В составе команды «Альфа» 8 игроков. Тренер команды хочет, чтобы все игроки провели на поле одинаковое количество времени. Сколько времени каждый игрок должен провести на поле?

Ответ:

✓ 27 минут 30 секунд
- 27 минут
- 32 минуты
- 32 минуты 30 секунд
- 37 минут
- 37 минут 30 секунд
- 42 минуты
- 42 минуты 30 секунд

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 3.

На спортивных соревнованиях по энерджиболу матч длится 68 минут, а на поле одновременно присутствуют 5 игроков. В составе команды «Альфа» 8 игроков. Тренер команды хочет, чтобы все игроки провели на поле одинаковое количество времени. Сколько времени каждый игрок должен провести на поле?

Ответ:

✓ 42 минуты 30 секунд
- 27 минут
- 27 минут 30 секунд
- 32 минуты
- 32 минуты 30 секунд
- 37 минут
- 37 минут 30 секунд
- 42 минуты

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 1. Вариант 4.

На спортивных соревнованиях по энерджиболу матч длится 52 минуты, а на поле одновременно присутствуют 5 игроков. В составе команды «Альфа» 8 игроков. Тренер команды хочет, чтобы все игроки провели на поле одинаковое количество времени. Сколько времени каждый игрок должен провести на поле?

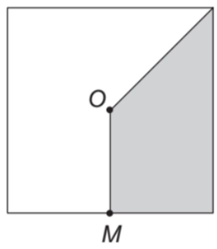
Ответ:

✓ 32 минуты 30 секунд
- 27 минут
- 27 минут 30 секунд
- 32 минуты
- 37 минут
- 37 минут 30 секунд

- 42 минуты
- 42 минуты 30 секунд

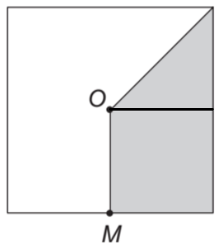
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 2. Вариант 1. Площадь квадрата, изображённого на рисунке равна 200 см^2. Точка O – центр квадрата, а точка M – середина его стороны. Чему равна площадь серой части?



Ответ: 75.

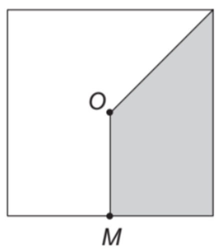
Решение. Разобьем закрашенную область на две части, как указано на рисунке:



Площадь серого квадрата составляет 1/4 от общей площади большого квадрата, а площадь серого треугольника – 1/2 от площади серого квадрата, то есть 1/8 от площади большого квадрата. Тогда серая область составляет 1/4+1/8=3/8 квадрата и её площадь равна $200 \cdot 3/8 = 75$ см^2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

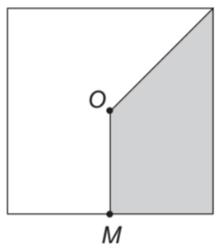
Задание 2. Вариант 2. Площадь квадрата, изображённого на рисунке равна 240 см^2. Точка O – центр квадрата, а точка M – середина его стороны. Чему равна площадь серой части?



Ответ: 90.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

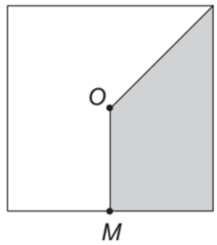
Задание 2. Вариант 3. Площадь квадрата, изображённого на рисунке равна 280 см^2. Точка O – центр квадрата, а точка M – середина его стороны. Чему равна площадь серой части?



Ответ: 105.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

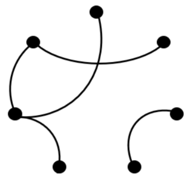
Задание 2. Вариант 4. Площадь квадрата, изображённого на рисунке равна 320 см^2. Точка O – центр квадрата, а точка M – середина его стороны. Чему равна площадь серой части?



Ответ: 120.

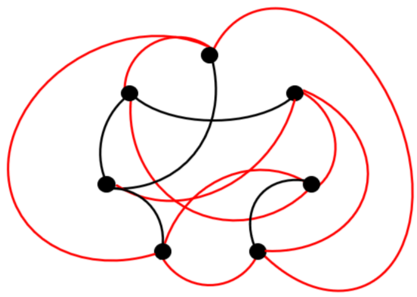
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 1. На карте точками обозначены города, а линиями — дороги. Какое наименьшее число дорог нужно добавить, чтобы из городов выходило поровну дорог?



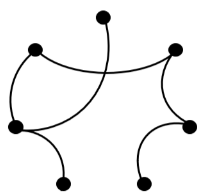
Ответ: 9.

Решение. Заметим, что уже есть город, из которого выходит 3 дороги, значит, из каждого должно выходить не менее 3 дорог. Если из каждого города будет выходить ровно 3 дороги, то всего исходящих дорог будет $3 \cdot 7 = 21$ – нечётное число, что невозможно, потому что каждая дорога считается дважды, ведь один её конец подходит к одному городу, а другой – к другому. Значит из каждого города выходит хотя бы 4 дороги. Тогда общее количество дорог – $4 \cdot 7/2 = 14$. Из них 5 уже имеется, остается добавить 9 дорог. Один из примеров, как это можно сделать, приведён на рисунке:



Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

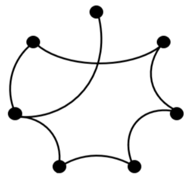
Задание 3. Вариант 2. На карте точками обозначены города, а линиями — дороги. Какое наименьшее число дорог нужно добавить, чтобы из городов выходило поровну дорог?



Ответ: 8.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

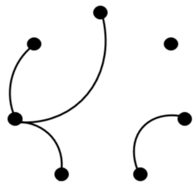
Задание 3. Вариант 3. На карте точками обозначены города, а линиями — дороги. Какое наименьшее число дорог нужно добавить, чтобы из городов выходило поровну дорог?



Ответ: 7.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 3. Вариант 4. На карте точками обозначены города, а линиями — дороги. Какое наименьшее число дорог нужно добавить, чтобы из городов выходило поровну дорог?



Ответ: 10.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 4. Вариант 1. На острове рыцарей и лжецов, где рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут, встретились четыре жителя – Антон, Иван, Пётр и Богдан.
Антон сказал: «Иван — лжец!»
Иван сказал: «Пётр — рыцарь!»
Пётр сказал: «Я знаю точно, что в паре Богдан и Антон один человек рыцарь, а другой лжец».
Богдан сказал: «Антон — лжец!»

Кем является каждый из собеседников?

Ответ: Антон – лжец, остальные рыцари.

Решение. Если Антон – рыцарь, то Иван – лжец, значит Иван солгал и Пётр тоже лжец. Так как Антон рыцарь, а Богдан это отрицает, то Богдан – лжец, тогда Пётр сказал правду. Противоречие.

Значит, Антон – лжец. тогда Иван – рыцарь, следовательно, и Пётр рыцарь, так как Иван назвал его рыцарем. В паре Антон и Богдан лжецом является Антон, значит, Богдан – рыцарь.

Итак, Антон – лжец, а Иван, Пётр и Богдан – рыцари.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указано три собеседника из четырёх – 2 балла

Задание 4. Вариант 2. На острове рыцарей и лжецов, где рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут, встретились четыре жителя – Антон, Иван, Пётр и Богдан.
Иван сказал: «Богдан — лжец!»
Богдан сказал: «Пётр — рыцарь!»
Пётр сказал: «Я знаю точно, что в паре Иван и Антон один человек рыцарь, а другой лжец».
Антон сказал: «Иван — лжец!»

Кем является каждый из собеседников?

Ответ: Иван – лжец, остальные рыцари.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указано три собеседника из четырёх – 2 балла

Задание 4. Вариант 3. На острове рыцарей и лжецов, где рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут, встретились четыре жителя – Антон, Иван, Пётр и Богдан.
Богдан сказал: «Антон — лжец!»
Антон сказал: «Иван — рыцарь!»
Иван сказал: «Я знаю точно, что в паре Богдан и Пётр один человек рыцарь, а другой лжец».
Пётр сказал: «Богдан — лжец!»

Кем является каждый из собеседников?

Ответ: Богдан – лжец, остальные рыцари.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указано три собеседника из четырёх – 2 балла

Задание 4. Вариант 4. На острове рыцарей и лжецов, где рыцари всегда говорят правду, а лжецы – лгут, встретились четыре жителя – Антон, Иван, Пётр и Богдан.

Пётр сказал: «Антон — лжец!»

Антон сказал: «Богдан — рыцарь!»

Богдан сказал: «Я знаю точно, что в паре Пётр и Иван один человек рыцарь, а другой лжец».

Иван сказал: «Пётр — лжец!»

Кем является каждый из собеседников?

Ответ: Пётр – лжец, остальные рыцари.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указано три собеседника из четырёх – 2 балла

Задание 5. Вариант 1. Саша составляет список из 100 чисел по следующему правилу: первое число в списке равно 2025, второе число равно 1, каждое следующее получается так: из последнего записанного числа вычитается предпоследнее и прибавляется 5. Например, третье число равно -2019, потому что $1-2025+5=-2019$. Найдите сумму 100 первых чисел из списка Саши.

Ответ: -1528.

Решение. Рассмотрим несколько первых чисел этой последовательности: $a_1 = 2025$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1-2025+5 = -2019$, $a_4 = -2019 - 1 + 5 = -2015$, $a_5 = -2015 + 2019 + 5 = 9$, $a_6 = 9 + 2015 + 5 = 2029$, $a_7 = 2029 - 9 + 5 = 2025$, $a_8 = 2025 - 2029 + 5 = 1$. Каждое следующее число однозначно определяется двумя предыдущими, а значит, мы получили последовательность, в которой каждое число периодически повторяется через 5 чисел. Сумма чисел в первой шестерке равна $2025 + 1 - 2019 - 2015 + 9 + 2029 = 30$. В списке из 100 чисел содержится 16 таких шестёрок и еще 4 числа. Тогда сумма чисел списка равна $30 \cdot 16 + 2025 + 1 - 2019 - 2015 = -1528$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 2. Саша составляет список из 100 чисел по следующему правилу: первое число в списке равно 2026, второе число равно 1, каждое следующее получается так: из последнего записанного числа вычитается предпоследнее и прибавляется 5. Например, третье число равно -2020, потому что $1-2026+5=-2020$. Найдите сумму 100 первых чисел из списка Саши.

Ответ: -1529.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 3. Саша составляет список из 100 чисел по следующему правилу: первое число в списке равно 2027, второе число равно 1, каждое следующее получается так: из последнего записанного числа вычитается предпоследнее и прибавляется 5. Например, третье число равно -2021, потому что $1-2027+5=-2021$. Найдите сумму 100 первых чисел из списка Саши.

Ответ: -1530.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 5. Вариант 4. Саша составляет список из 100 чисел по следующему правилу: первое число в списке равно 2028, второе число равно 1, каждое следующее получается так: из последнего записанного числа вычитается предпоследнее и прибавляется 5. Например, третье число равно -2022, потому что $1-2028+5=-2022$. Найдите сумму 100 первых чисел из списка Саши.

Ответ: -1531.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 1. В тетрадь записаны последовательные целые числа от 1 до 101 ручками двух цветов: красной и синей. Оказалось, что наибольшее число, записанное синим цветом, равно количеству чисел, записанных синим цветом. А наименьшее число, записанное красным цветом, равно половине от количества чисел, записанных красным цветом. Сколько чисел записано красным цветом?

Ответ: 68.

Решение. Докажем, что синим цветом записаны последовательные числа от 1 до $n < 101$. Пусть k – наибольшее число, записанное синим цветом, и есть число $m < k$, причем m записано красным цветом, тогда чисел, записанных синим цветом, меньше k. Противоречие.

Пусть теперь синим цветом записаны числа $1, \ldots, n$, а красным $n+1, \ldots, 101$. Из условия задачи следует, что $n+1 = \frac{101-n}{2}$. Решая это уравнение, получим $n = 33$. Значит, красным цветом записано $101 - 33 = 68$ чисел.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 2. В тетрадь записаны последовательные целые числа от 1 до 104 ручками двух цветов: красной и синей. Оказалось, что наибольшее число, записанное синим цветом, равно количеству чисел, записанных синим цветом. А наименьшее число, записанное красным цветом, равно половине от количества чисел, записанных красным цветом. Сколько чисел записано красным цветом?

Ответ: 70.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 3. В тетрадь записаны последовательные целые числа от 1 до 107 ручками двух цветов: красной и синей. Оказалось, что наибольшее число, записанное синим цветом, равно количеству чисел, записанных синим цветом. А наименьшее число, записанное красным цветом, равно половине от количества чисел, записанных красным цветом. Сколько чисел записано красным цветом?

Ответ: 72.

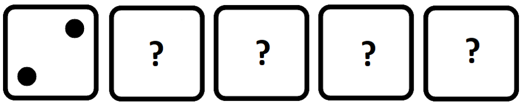
Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 6. Вариант 4. В тетрадь записаны последовательные целые числа от 1 до 110 ручками двух цветов: красной и синей. Оказалось, что наибольшее число, записанное синим цветом, равно количеству чисел, записанных синим цветом. А наименьшее число, записанное красным цветом, равно половине от количества чисел, записанных красным цветом. Сколько чисел записано красным цветом?

Ответ: 74.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 1.



Имеются пять одинаковых игральных кубиков. На их гранях с помощью точек нанесены числа от 1 до 6. Петя выложил кубики в ряд как показано на рисунке. Используя цифры на верхних гранях слева направо, он составил пятизначное число, произведение цифр которого оказалось кратно 8. Сколько таких пятизначных чисел мог получить Петя, если самый левый кубик всегда лежит как показано на рисунке, и обозначает старший разряд числа?

Ответ: 999.

Решение. Так как на первом кубике выпало 2, то нужно, чтобы произведение чисел на остальных кубиках было кратно 4.

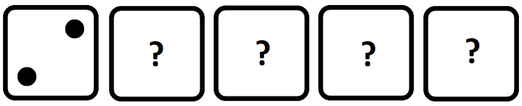
На каждом из четырёх оставшихся кубиков может быть любое число от 1 до 6, поэтому общее количество возможных пятизначных чисел будет равно $6^4 = 1296$, так как первый разряд определён однозначно, а для каждого из остальных четырёх есть по 6 вариантов. Найдем, сколько среди них чисел, у которых произведение цифр не делится на 4. Это числа, у которых либо все цифры нечётные, либо есть одна чётная цифра, не кратная 4. Чисел, удовлетворяющих условию задачи, и у которых все цифры нечётные $3^4 = 81$, так как имеется всего 3 нечётные цифры 1, 3, 5 и четыре позиции, на которых они могут стоять.

Количество чисел, у которых есть ровно одна чётная цифра, не кратная 4, можно посчитать следующим образом: чётную цифру можно выбрать двумя способами 2 или 6, позицию для неё 4 способами, всего $2 \cdot 4 = 8$ способов. Остальные три позиции может занять любая из трёх оставшихся нечётных цифр. Таким образом, всего $3^3 \cdot 8 = 216$ таких чисел.

Окончательно получаем, что чисел требуемого вида будет $1296 - 81 - 216 = 999$.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 2.

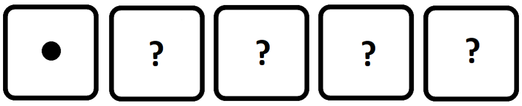


Имеются пять одинаковых игральных кубиков. На их гранях с помощью точек нанесены числа от 1 до 6. Петя выложил кубики в ряд как показано на рисунке. Используя цифры на верхних гранях слева направо, он составил пятизначное число, произведение цифр которого оказалось кратно 9. Сколько таких пятизначных чисел мог получить Петя, если самый левый кубик всегда лежит как показано на рисунке, и обозначает старший разряд числа?

Ответ: 528.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 3.

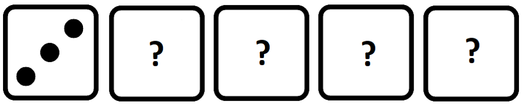


Имеются пять одинаковых игральных кубиков. На их гранях с помощью точек нанесены числа от 1 до 6. Петя выложил кубики в ряд как показано на рисунке. Используя цифры на верхних гранях слева направо, он составил пятизначное число, произведение цифр которого оказалось кратно 4. Сколько таких пятизначных чисел мог получить Петя, если самый левый кубик всегда лежит как показано на рисунке, и обозначает старший разряд числа?

Ответ: 999.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 7. Вариант 4.



Имеются пять одинаковых игральных кубиков. На их гранях с помощью точек нанесены числа от 1 до 6. Петя выложил кубики в ряд как показано на рисунке. Используя цифры на верхних гранях слева направо, он составил пятизначное число, произведение цифр которого оказалось кратно 27. Сколько таких пятизначных чисел мог получить Петя, если самый левый кубик всегда лежит как показано на рисунке, и обозначает старший разряд числа?

Ответ: 528.

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 7 баллов

Задание 8. Вариант 1. У Кати есть неограниченное количество одинаковых бумажных квадратов и фломастеры четырёх цветов. Она может произвольным образом раскрасить стороны каждого из квадратов в четыре разных цвета и склеить из них прямоугольник по следующему правилу: склеивать можно только края одинакового цвета. При этом у полученного прямоугольника каждая сторона должна быть полностью одного цвета и все его стороны должны быть разных цветов.

Прямоугольник какого размера она сможет получить, действуя таким образом? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- ✓ 2025×2025
- ✓ 2025×2027
- ✓ 2026×2026
- ✓ 2027×2027
- 2026×2027
- 2025×2026

Решение. Докажем более общее утверждение: если длины сторон прямоугольника одной чётности, то его можно склеить, если разной, то нельзя.

Положим для определённости, что имеются фломастеры красного, синего, чёрного и зелёного цветов. Будем называть исходные одинаковые квадратики единичными.

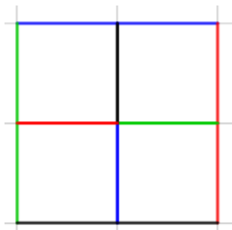
1. Пусть обе стороны прямоугольника нечётные, например $2k + 1 \times 2n + 1$.

Склеим сначала полоску $1 \times 2k + 1$ как указано на рисунке

Если склеить $2n + 1$ таких прямоугольников, то получится прямоугольник $2k + 1 \times 2n + 1$, у которого стороны окрашены в разные цвета.

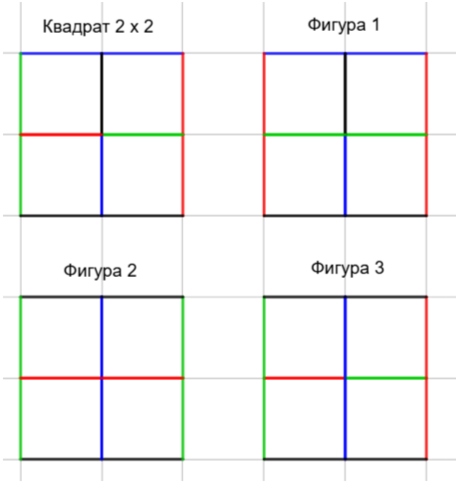
2. Пусть обе стороны прямоугольника чётные, например $2k \times 2n$.

Склеим вначале квадрат 2×2



Теперь, чтобы получить $2k \times 2$, справа к квадрату 2×2 будем приклеивать Фигуру 1 $k-1$ раз. Назовем эту полоску первой.

Далее склеим $n-1$ полоску из $k-1$ Фигуры 2 и одной Фигуры 3. Склеим эти полоски между собой по границе чёрного цвета и приклеим полученную фигуру к первой полоске. Получим прямоугольник $2k \times 2n$.



Докажем теперь, что если стороны прямоугольника разной чётности, то склеить его невозможно. Каждый такой прямоугольник состоит из чётного числа единичных квадратиков. Значит, число единичных сторон каждого цвета – чётное число. Рассмотрим сторону прямоугольника нечётной длины, пусть для определённости она красного цвета. Так как все квадратики склеиваются парами одноцветных сторон, то внутри прямоугольника красных сторон единичных квадратиков чётное число, а снаружи нечётное. Тогда и суммарно красных сторон нечётное количество, но единичных квадратиков чётно и у каждого есть красная сторона. Противоречие.

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указаны только ответы с нечетными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указаны только ответы с четными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указан прямоугольник, не являющийся квадратом, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 1 балл

Задание 8. Вариант 2. У Кати есть неограниченное количество одинаковых бумажных квадратов и фломастеры четырёх цветов. Она может произвольным образом раскрасить стороны каждого из квадратов в четыре разных цвета и склеить из них прямоугольник по следующему правилу: склеивать можно только края одинакового цвета. При этом у полученного прямоугольника каждая сторона должна быть полностью одного цвета, и все его стороны должны быть разных цветов.

Прямоугольник какого размера она сможет получить, действуя таким образом? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- ✓ 1025×1025
- ✓ 1025×1027
- ✓ 1024×1024
- ✓ 1027×1027
- 1027×1028
- 1025×1026

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указаны только ответы с нечетными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указаны только ответы с четными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указан прямоугольник, не являющийся квадратом, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 1 балл

Задание 8. Вариант 3. У Кати есть неограниченное количество одинаковых бумажных квадратов и фломастеры четырёх цветов. Она может произвольным образом раскрасить стороны каждого из квадратов в четыре разных цвета и склеить из них прямоугольник по следующему правилу: склеивать можно только края одинакового цвета. При этом у полученного прямоугольника каждая сторона должна быть полностью одного цвета и все его стороны должны быть разных цветов.

Прямоугольник какого размера она сможет получить, действуя таким образом? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- ✓ 1035×1035
- ✓ 1037×1027
- ✓ 1034×1034
- ✓ 1047×1047
- 1037×1038
- 1035×1036

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указаны только ответы с нечетными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указаны только ответы с четными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указан прямоугольник, не являющийся квадратом, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 1 балл

Задание 8. Вариант 4. У Кати есть неограниченное количество одинаковых бумажных квадратов и фломастеры четырёх цветов. Она может произвольным образом раскрасить стороны каждого из квадратов в четыре разных цвета и склеить из них прямоугольник по следующему правилу: склеивать можно только края одинакового цвета. При этом у полученного прямоугольника каждая сторона должна быть полностью одного цвета и все его стороны должны быть разных цветов.

Прямоугольник какого размера она сможет получить, действуя таким образом? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- ✓ 2029×2029
- ✓ 2029×2027
- ✓ 2036×2036
- ✓ 2025×2025
- 2028×2029
- 2027×2026

Критерий оценивания:

точное совпадение ответа — 7 баллов

верно указаны только ответы с нечетными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указаны только ответы с четными сторонами, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 2 балла

верно указан прямоугольник, не являющийся квадратом, никакой неверный ответ не указан в качестве верного – 1 балл