11 класс

Задача 1.1. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$a_1 + a_2 = 9,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 108.$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Задача 1.2. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$a_1 + a_2 = 10,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 88.$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Задача 1.3. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$a_1 + a_2 = 11,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 164.$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Задача 1.4. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$, такая, что

$$a_1 + a_2 = 14,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 104.$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

Задача 2.1. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 3, 5, 7, 8. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Задача 2.2. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 1, 2, 4, 7. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Задача 2.2. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 1, 2, 4, 5. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Задача 2.4. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 1, 3, 4, 6. Он случайным образом составляет из них число вида $\overline{ab}^{\overline{cd}}$. С какой вероятностью это число делится на 3?

Выражение $\overline{ab}$ обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b.

Задача 3.1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 51°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении $2 : 5$.

(а) **(4 балла)** Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) **(3 балла)** Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Задача 3.2. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC — и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 53°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении $1 : 4$.

(а) **(4 балла)** Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) **(3 балла)** Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Задача 3.3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC — и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 48°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении $3 : 7$.

(а) **(4 балла)** Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) **(3 балла)** Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Задача 3.4. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC — и точку F — пересечение лучей AB и DC. Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 52°$ и угловые меры дуг $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{AD}$ находятся в соотношении $1 : 4$.

(а) **(4 балла)** Найдите угол AFD. Ответ выразите в градусах.

(б) **(3 балла)** Найдите величину меньшей дуги $\overset{\frown}{BC}$. Ответ выразите в градусах.

Задача 4.1. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 100$ и

$$\lfloor\sqrt{a}\rfloor + \lceil\sqrt{b}\rceil = \lceil\sqrt{a}\rceil + \lfloor\sqrt{b}\rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Задача 4.2. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 81$ и

$$\lfloor \sqrt{a} \rfloor + \lceil \sqrt{b} \rceil = \lceil \sqrt{a} \rceil + \lfloor \sqrt{b} \rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Задача 4.3. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 144$ и

$$\lfloor \sqrt{a} \rfloor + \lceil \sqrt{b} \rceil = \lceil \sqrt{a} \rceil + \lfloor \sqrt{b} \rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Задача 4.4. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b, таких, что $1 \leqslant a < b \leqslant 64$ и

$$\lfloor \sqrt{a} \rfloor + \lceil \sqrt{b} \rceil = \lceil \sqrt{a} \rceil + \lfloor \sqrt{b} \rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x, а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x.

Задача 5.1. Дана колода из 300 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 300 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×100 (3 строки, 100 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Задача 5.2. Дана колода из 600 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 600 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×200 (3 строки, 200 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Задача 5.3. Дана колода из 900 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 900 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×300 (3 строки, 300 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Задача 5.4. Дана колода из 1200 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 1200 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×400 (3 строки, 400 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. *Удачностью* пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

Задача 6.1. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 2, а один из двух корней второго трёхчлена равен -5. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(3, 4)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) **(2 балла)** Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) **(5 баллов)** Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Задача 6.2. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 3, а один из двух корней второго трёхчлена равен -5. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(4, 6)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) **(2 балла)** Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) **(5 баллов)** Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Задача 6.3. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 2 и 4, а один из двух корней второго трёхчлена равен -3. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(6, 7)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) **(2 балла)** Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) **(5 баллов)** Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Задача 6.4. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 4, а один из двух корней второго трёхчлена равен -4. Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(5, 8)$, а вторая — лежит на оси ординат.

(а) **(2 балла)** Найдите ординату второй точки пересечения графиков.
(б) **(5 баллов)** Найдите произведение корней второго трёхчлена.

Задача 7.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 1, треугольника ACC_1 — 34.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 46. Чему равна площадь треугольника ABC?

Задача 7.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 2, треугольника ACC_1 — 37.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 43. Чему равна площадь треугольника ABC?

Задача 7.3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 4, треугольника ACC_1 — 17.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 23. Чему равна площадь треугольника ABC?

Задача 7.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 12, треугольника ACC_1 — 24.

(а) (2 балла) Пусть S — площадь треугольника CDC_1. Найдите S^2.

(б) (5 баллов) Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 31. Чему равна площадь треугольника ABC?

Задача 8.1. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 9 минут, получив последовательность из 10 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 10 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Задача 8.2. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;

- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 11 минут, получив последовательность из 12 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 12 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Задача 8.3. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 13 минут, получив последовательность из 14 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 14 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?

Задача 8.4. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «a», «b» или «c». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «a» букву «c»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «c»;
- Приписывает сразу после буквы «c» ещё одну букву «c»;
- Стирает букву «c» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 15 минут, получив последовательность из 16 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 16 букв, в которых ровно 2 буквы «c», может получить Петя?