Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике для 10 класса 2025-2026 учебный год Максимальное количество баллов за задачу — 7

Максимальное количество баллов за работу — 56

Задача 1.1. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ такова, что $a_2 + a_4 = 20$ и $a_1 \cdot a_3 = 40$. Найдите значение a_{11}.

Ответ: 34

Решение. Заметим, что по свойству арифметической прогрессии $a_3 = \frac{a_2+a_4}{2} = 10$. Из второго равенства будет следовать, что $a_1 = \dfrac{40}{a_3} = 4$.

Пусть d является разностью этой прогрессии. Тогда $10 = a_3 = a_1 + 2d = 4 + 2d$, откуда $d = 3$.

Наконец, $a_{11} = a_1 + 10d = 4 + 10 \cdot 3 = 34$.

Вариант 1.2. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ такова, что $a_2 + a_4 = 26$ и $a_1 \cdot a_3 = 39$. Найдите значение a_{11}.

Ответ: 53

Вариант 1.3. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ такова, что $a_2 + a_4 = 22$ и $a_1 \cdot a_3 = 33$. Найдите значение a_{11}.

Ответ: 43

Вариант 1.4. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ такова, что $a_2 + a_4 = 26$ и $a_1 \cdot a_3 = 91$. Найдите значение a_{11}.

Ответ: 37

Задача 2.1. По кругу лежат 900 шаров. Каждый шар окрашен в один из трёх цветов — синий, красный или зелёный. Известно, что среди любых четырёх подряд идущих шаров есть шары всех трёх цветов. Кроме того, никакой красный шар не соседствует с зелёным. Сколько синих шаров может быть? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 450.

Решение. Предположим, что в какой-то четвёрке соседних шаров есть два красных шара. Если они лежат рядом, то рассмотрим такую четвёрку, где они лежат на втором и третьем месте. Где-то в этой четвёрке должен быть зелёный шар, но тогда он окажется рядом с красным, противоречие. Если же красные шары не лежат рядом, то опять-таки зелёный шар в этой четвёрке находится рядом с каким-то красным, противоречие. Значит, в каждой четвёрке не более одного красного шара.

Аналогично можно понять, что в каждой четвёрке не более одного зелёного шара. Поскольку в каждой четвёрке хотя бы по одному шару каждого цвета, синих шаров может быть только ровно 2. Тогда все 900 шаров можно разбить на 225 четвёрок, и поскольку в каждой из них ровно 2 синих шара, всего синих шаров 450.

При этом 450 синих шаров может быть, если шары чередуются так: синий, красный, синий, зелёный, синий, красный, синий, зелёный, …

Вариант 2.2. По кругу лежат 1200 шаров. Каждый шар окрашен в один из трёх цветов — синий, красный или зелёный. Известно, что среди любых четырёх подряд идущих шаров есть шары всех трёх цветов. Кроме того, никакой красный шар не соседствует с зелёным. Сколько синих шаров может быть? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 600.

Вариант 2.3. По кругу лежат 1500 шаров. Каждый шар окрашен в один из трёх цветов — синий, красный или зелёный. Известно, что среди любых четырёх подряд идущих шаров есть шары всех трёх цветов. Кроме того, никакой красный шар не соседствует с зелёным. Сколько синих шаров может быть? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ за-писывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 750.

Вариант 2.4. По кругу лежат 1800 шаров. Каждый шар окрашен в один из трёх цветов — синий, красный или зелёный. Известно, что среди любых четырёх подряд идущих шаров есть шары всех трёх цветов. Кроме того, никакой красный шар не соседствует с зелёным. Сколько синих шаров может быть? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ за-писывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 900.

Задача 3.1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Оказалось, что $AB : BC : CD = 7 : 6 : 2$, а площадь четырёхугольника равна 120. Найдите периметр четырёхугольника.

Ответ: 48

Решение. Пусть длины отрезков AB, BC, CD равны $7x$, $6x$, $2x$ соответственно. Записав теоремы Пифагора для треугольников ABC и ADC, получим равенство

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$49x^2 + 36x^2 = AD^2 + 4x^2$$

$$AD^2 = (49 + 36 - 4)x^2 = 81x^2$$

$$AD = 9x$$

Выразив площадь четырёхугольника $ABCD$ через сумму площадей треугольников ABC и ADC, получим

$$120 = \frac{7x \cdot 6x}{2} + \frac{9x \cdot 2x}{2} = 21x^2 + 9x^2 = 30x^2,$$

откуда $x = 2$.

Наконец, периметр $ABCD$ равен $7x + 6x + 9x + 2x = 24x = 48$.

Вариант 3.2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Оказалось, что $AB : BC : CD = 7 : 6 : 2$, а площадь четырёхугольника равна 270. Найдите периметр четырёхугольника.

Ответ: 72

Вариант 3.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Оказалось, что $AB : BC : CD = 7 : 6 : 2$, а площадь четырёхугольника равна 480. Найдите периметр четырёхугольника.

Ответ: 96

Вариант 3.4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Оказалось, что $AB : BC : CD = 7 : 6 : 2$, а площадь четырёхугольника равна 750. Найдите периметр четырёхугольника.

Ответ: 120

Задача 4.1. Отметьте на рисунке максимально возможное количество белых клеток так, чтобы они не касались друг друга по стороне или углу.

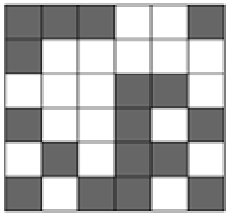


Рис. 1: К условию задачи 4.1

Ответ:

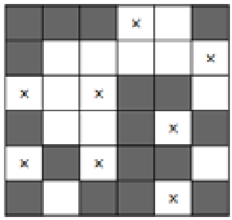
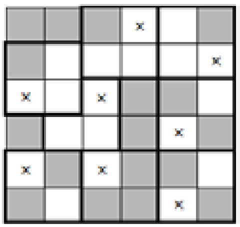


Рис. 2: К решению задачи 4.1



Решение. Больше 8 клеток отметить не получится. Для доказательства этого разобьём белые клетки доски на 8 частей, в каждой из которых можно отметить не более одной белой клетки.

Можно доказать, что пример единственный.

Вариант 4.2. Отметьте на рисунке максимально возможное количество белых клеток так, чтобы они не касались друг друга по стороне или углу.

Вариант 4.3. Отметьте на рисунке максимально возможное количество белых клеток так, чтобы они не касались друг друга по стороне или углу.

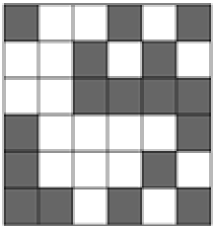


Рис. 3: К условию задачи 4.2

Ответ:

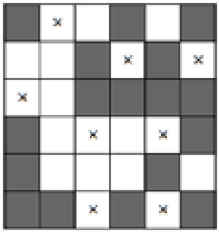


Рис. 4: К решению задачи 4.2

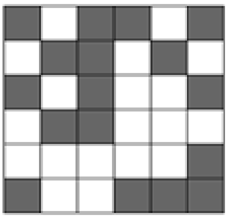


Рис. 5: К условию задачи 4.3

Ответ:

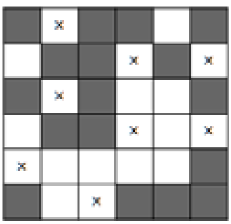


Рис. 6: К решению задачи 4.3

Вариант 4.4. Отметьте на рисунке максимально возможное количество белых клеток так, чтобы они не касались друг друга по стороне или углу.

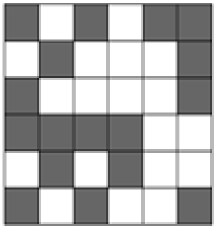


Рис. 7: К условию задачи 4.4

Ответ:

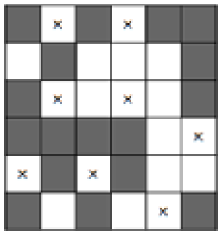


Рис. 8: К решению задачи 4.4

Задача 5.1. У Коли есть три стопки с монетами: в одной — 30, в другой — 18, в третьей — 45 монет. Он перекладывает монеты между кучками. На очередном шаге он должен выбрать стопку с нечётным количеством монет, забрать оттуда две монеты и положить по одной в две другие кучки. Какое наибольшее количество монет Коля сможет собрать в одной стопке?

Ответ: 88.

Решение. При каждом шаге в одной из кучек количество монет уменьшается на 2, а в каждой из других — увеличивается на 1. Это означает, что разность числа монет между кучками либо не меняется, либо изменяется на 3. Поэтому остатки от деления на 3 количества монет в кучках всегда равны друг другу.

Можно понять, что в каждой кучке всегда остаётся хотя бы одна монета, т.к. если из кучки забирали монеты, то в ней оставалось нечётное количество монет, т.е. не 0. Может ли в двух кучках остаться ровно по 1 монете? Нет, т.к. на предыдущем ходу в какую-то из кучек требовалось положить монету, т.е. в ней должно было быть 0 монет, что невозможно.

Могло ли в двух кучках остаться ровно по 2 монеты? Если так, то на предыдущем ходу монеты забирались из третьей кучки, но тогда в этих кучках было по 1 монете, что невоз-можно, как мы уже доказали.

В одной кучке 1 монета, а в другой 2 быть не могло, т.к. 1 и 2 дают разные остатки при делении на 3. Значит, в двух кучках суммарно не менее 5 монет, т.е. в третьей не более $30 + 18 + 45 - 5 = 88$ монет.

Теперь покажем, как собрать в одной кучке 88 монет. Для этого сначала из кучки из 45 монет переложим по одной в две другие, в них станет 31 и 19. Далее будем следить толь-ко за этими двумя кучками, оставшиеся монеты всегда в третьей. Если сначала дважды брать из большей из них, а потом дважды из меньшей, то в каждой из этих кучек количе-ство монет уменьшится на 2 и можно будет продолжать эту операцию. Так можно делать, пока во второй кучке не останется 1 монета, а в первой тогда будет 13 монет. Далее 6 раз возьмём из неё, будут кучки по 1 и по 7, а потом 3 раза из второй кучки, будут кучки по 4 и по 1. В них суммарно 5 монет, поэтому в третьей кучке 88 монет.

Вариант 5.2. У Коли есть три стопки с монетами: в одной — 33, в другой — 18, в третьей — 45 монет. Он перекладывает монеты между кучками. На очередном шаге он должен выбрать стопку с нечётным количеством монет, забрать оттуда две монеты и положить по одной в две другие кучки. Какое наибольшее количество монет Коля сможет собрать в одной стопке?

Ответ: 91.

Вариант 5.3. У Коли есть три стопки с монетами: в одной — 36, в другой — 18, в третьей — 45 монет. Он перекладывает монеты между кучками. На очередном шаге он должен выбрать стопку с нечётным количеством монет, забрать оттуда две монеты и положить по одной в две другие кучки. Какое наибольшее количество монет Коля сможет собрать в одной стопке?

Ответ: 94 монет.

Вариант 5.4. У Коли есть три стопки с монетами: в одной — 39, в другой — 18, в третьей — 45 монет. Он перекладывает монеты между кучками. На очередном шаге он должен выбрать стопку с нечётным количеством монет, забрать оттуда две монеты и положить по одной в две другие кучки. Какое наибольшее количество монет Коля сможет собрать в одной стопке?

Ответ: 97 монет.

Задача 6.1. Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$\sin\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{7} = 2.$$

Ответ: 31,5

Решение. Поскольку $\sin\frac{\pi x}{3} \leqslant 1$ и $\sin\frac{\pi x}{7} \leqslant 1$, их сумма будет равна 2 в том и только том случае, когда

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi x}{3} = 1 \\ \sin\frac{\pi x}{7} = 1 \end{cases}$$

Это возможно только при целых n и m, что

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{3} = \pi/2 + 2\pi n \\ \frac{\pi x}{7} = \pi/2 + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3/2 + 6n \\ x = 7/2 + 14m \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что m должно быть неотрицательным. Для $m = 0$ и $m = 1$ получается, что n будет нецелым. Для $m = 2$ получим что $n = 5$. Таким образом, минимальное положительное такое x равно 31.5.

Вариант 6.2. Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$\sin\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{11} = 2.$$

Ответ: 49,5

Вариант 6.3. Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$\sin\frac{\pi x}{5} + \sin\frac{\pi x}{9} = 2.$$

Ответ: 22,5

Вариант 6.4. Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$\sin\frac{\pi x}{5} + \sin\frac{\pi x}{17} = 2.$$

Ответ: 42,5

Задача 7.1. У Зевса есть карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Он случайным образом составляет из них число вида $О^{Л^{И^{М^{П}}}}$. Какова вероятность, что полученное число будет заканчиваться на 1?

Обратите внимание, что возведение в степень выполняется сверху вниз, т. е. сначала М возводится в степень П, затем И возводится в результат предыдущего действия и т.д.

Ответ: $\frac{17}{60}$

Решение. Если на место О поставить цифры 2 или 4, то число будет чётным и не будет заканчиваться на 1. Если поставить 5, то оно будет заканчиваться на 5. Если поставить 1, то любая комбинация оставшихся нам подойдёт, вероятность этого равна $\frac{1}{5}$, т.к. на месте О все цифры равновероятны.

Если же на месте О будет цифра 3, то число будет заканчиваться на 1 только в том случае, если степень, в которую возводится 3, делится на 4. Действительно, последние цифры степеней тройки зацикливаются с периодом 4: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, …

Посмотрим, когда $Л^{И^{М^{П}}}$ будет делиться на 4. Для этого Л должно быть чётным. При этом если Л $= 2$, то И не должно быть равно 1, т.к. иначе $Л^{И^{М^{П}}} = 2$.

Посчитаем вероятности. Вероятность того, что О $= 3$ и Л $= 4$ равна $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. Вероятность того что О $= 3$ и Л $= 2$ тоже равна $\frac{1}{20}$. При этом вероятность того что О $= 3$, Л $= 2$ и И $= 1$ равна $\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{60}$.

В итоге получаем $\frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{12+3+3-1}{60} = \frac{17}{60}$.

Вариант 7.2. У Зевса есть карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Он случайным образом составляет из них число вида $О^{Л^{И^{М^{П}}}}$. Какова вероятность, что полученное число не будет заканчиваться на 1?

Обратите внимание, что возведение в степень выполняется сверху вниз, т. е. сначала М возводится в степень П, затем И возводится в результат предыдущего действия и т.д.

Ответ: $\frac{43}{60}$

Задача 8.1. Треугольники ABC и ADE расположены на координатной плоскости так, что $B = (0;0)$, $C = (123;0)$, $D = (800;600)$ и $E = (810;610)$, а их площади равны 1234 и 5678 соответственно. Чему равна сумма всех возможных абсцисс точки A?

Напомним, что *абсциссой* точки называется её координата по оси Ox.

Ответ: 800

Решение. Заметим, что геометрическим местом таких точек A, что площадь треугольника ABC постоянна, являются две прямые, параллельные BC и симметричные относительно неё. Аналогично, геометрическим местом таких точек A, что площадь треугольника ADE постоянна, являются две прямые, параллельные DE и симметричные относительно неё.

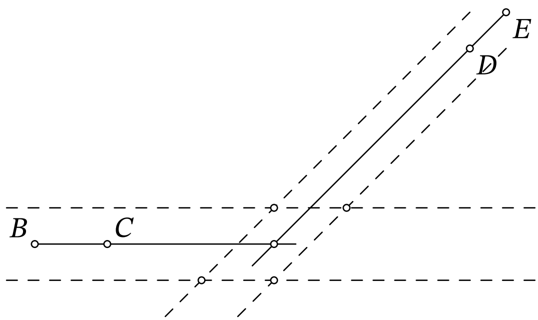


Рис. 9: К решению задачи 8.1

Заметим, что тогда точка A может совпадать с одной из четырёх точек пересечения этих двух пар параллельных прямых, которые образуют параллелограмм. Несложно также заметить, что точка пересечения прямых BC и DE является центром этого параллелограмма. Точка M пересечения прямых BC и DE имеет координаты $(200;0)$.

Абсцисса центра параллелограмма является средним арифметическим абсцисс его вершин. Таким образом, сумма абсцисс параллелограмма равна абсциссе точки M, умноженной на 4, то есть $200 \cdot 4 = 800$.

Вариант 8.2. Треугольники ABC и ADE расположены на координатной плоскости так, что $B = (0;0)$, $C = (123;0)$, $D = (400;300)$ и $E = (410;310)$, а их площади равны 1234 и 5678 соответственно. Чему равна сумма всех возможных абсцисс точки A?

Напомним, что *абсциссой* точки называется её координата по оси Ox.

Ответ: 400

Вариант 8.3. Треугольники ABC и ADE расположены на координатной плоскости так, что $B = (0;0)$, $C = (123;0)$, $D = (600;300)$ и $E = (610;310)$, а их площади равны 1234 и 5678 соответственно. Чему равна сумма всех возможных абсцисс точки A?

Напомним, что *абсциссой* точки называется её координата по оси Ox.

Ответ: 1200

Вариант 8.4. Треугольники ABC и ADE расположены на координатной плоскости так, что $B = (0; 0)$, $C = (123; 0)$, $D = (900; 400)$ и $E = (910; 410)$, а их площади равны 1234 и 5678 соответственно. Чему равна сумма всех возможных абсцисс точки A?

Напомним, что *абсциссой* точки называется её координата по оси Ox.

Ответ: 2000