Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ
по математике для 9 класса
2025-2026 учебный год
Максимальное количество баллов за задачу — 7
Максимальное количество баллов за работу — 56

Задача 1.1. В школьной библиотеке 89 детских журналов, из которых 15 — с кроссвордами. Сколько ещё журналов с кроссвордами нужно заказать, чтобы их вклад составил ровно треть от общего числа?

Ответ: 22

Решение. Обозначим через x количество журналов, которые нужно заказать. Тогда получим, что $15 + x = \frac{1}{3}(89 + x)$, что преобразуется в уравнение $45 + 3x = 89 + x$, у которого есть единственное решение $x = \frac{89-45}{2} = 22$.

Вариант 1.2. В школьной библиотеке 93 детских журнала, из которых 19 — с кроссвордами. Сколько ещё журналов с кроссвордами нужно заказать, чтобы их вклад составил ровно треть от общего числа?

Ответ: 18

Вариант 1.3. В школьной библиотеке 85 детских журналов, из которых 11 — с кроссвордами. Сколько ещё журналов с кроссвордами нужно заказать, чтобы их вклад составил ровно треть от общего числа?

Ответ: 26

Вариант 1.4. В школьной библиотеке 97 детских журналов, из которых 23 — с кроссвордами. Сколько ещё журналов с кроссвордами нужно заказать, чтобы их вклад составил ровно треть от общего числа?

Ответ: 14

Задача 2.1. Отметьте 5 клеток данной таблицы 5×5 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой обведенной области была ровно одна отмеченная клетка и чтобы эти клетки не касались друг друга стороной или углом.

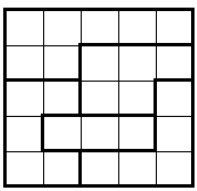

Рис. 1: К условию задачи 2.1

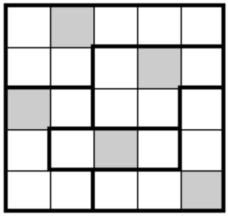

Рис. 2: К решению задачи 2.1

Ответ:

Можно доказать, что этот пример единственный.

Вариант 2.2. Отметьте 5 клеток данной таблицы 5×5 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой обведенной области была ровно одна отмеченная клетка и чтобы эти клетки не касались друг друга стороной или углом.

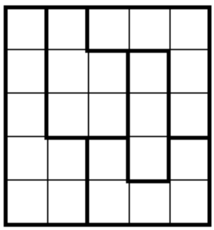

Рис. 3: К условию задачи 2.2

Ответ:

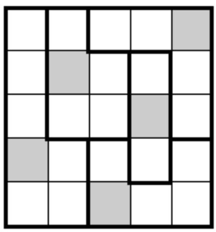

Рис. 4: К решению задачи 2.2

Вариант 2.3. Отметьте 5 клеток данной таблицы 5×5 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой обведенной области была ровно одна отмеченная клетка и чтобы эти клетки не касались друг друга стороной или углом.

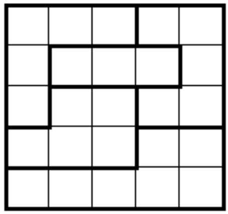

Рис. 5: К условию задачи 2.3

Ответ:

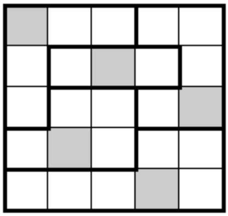

Рис. 6: К решению задачи 2.3

Вариант 2.4. Отметьте 5 клеток данной таблицы 5×5 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой обведенной области была ровно одна отмеченная клетка и чтобы эти клетки не касались друг друга стороной или углом.

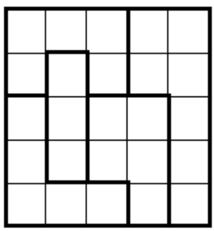

Рис. 7: К условию задачи 2.4

Ответ:

Задача 3.1. В первый день лета Петя прочитал одну страницу 227-страничной книги. Каждый следующий день он читал на одну страницу больше, чем в предыдущий, кроме своего дня рождения, когда ему было некогда и он ничего не прочел. 30 июня он дочитал книгу. Сколько страниц он мог прочитать 30 июня? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

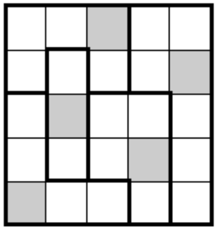

Рис. 8: К решению задачи 2.4

Ответ: 13 или 16.

Решение. Пусть Петя непрерывно читал x дней, потом у него был день рождения, а потом он снова непрерывно читал $29 - x$ дней. За первые дни он прочитал $1 + 2 + \ldots + x = \frac{x(x+1)}{2}$ страниц. За последующие дни он прочитал $1 + 2 + \ldots + (29 - x) = \frac{(29-x)(30-x)}{2}$ страниц.

Получаем уравнение

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{(29-x)(30-x)}{2} = 227$$

$$x(x+1) + (29-x)(30-x) = 454$$

$$2x^2 + (1 - 29 - 30)x + 29 \cdot 30 = 454$$

$$2x^2 - 58x + 416 = 0$$

$$x^2 - 29x + 208 = 0$$

$$(x-13)(x-16) = 0$$

Значит есть два варианта: $x = 13$ или $x = 16$.

В конце месяца Петя прочитал $29 - x$ страниц, то есть 16 или 13. □

Вариант 3.2. В первый день лета Петя прочитал одну страницу 245-страничной книги. Каждый следующий день он читал на одну страницу больше, чем в предыдущий, кроме своего дня рождения, когда ему было некогда и он ничего не прочел. 30 июня он дочитал книгу. Сколько страниц он мог прочитать 30 июня? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 10 или 19.

Вариант 3.3. В первый день лета Петя прочитал одну страницу 267-страничной книги. Каждый следующий день он читал на одну страницу больше, чем в предыдущий, кроме своего дня рождения, когда ему было некогда и он ничего не прочел. 30 июня он дочитал книгу. Сколько страниц он мог прочитать 30 июня? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 8 или 21.

Вариант 3.4. В первый день лета Петя прочитал одну страницу 237-страничной книги. Каждый следующий день он читал на одну страницу больше, чем в предыдущий, кроме своего дня рождения, когда ему было некогда и он ничего не прочел. 30 июня он дочитал книгу. Сколько страниц он мог прочитать 30 июня? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ: 11 или 18.

Задача 4.1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили середину M. Точки X и Y расположены на плоскости так, как на рисунке, причём треугольники AMX и BMY равносторонние. Найдите углы треугольника CXY, если $\angle ABC = 32°$. Ответ выразите в градусах. Порядок ответов не важен.

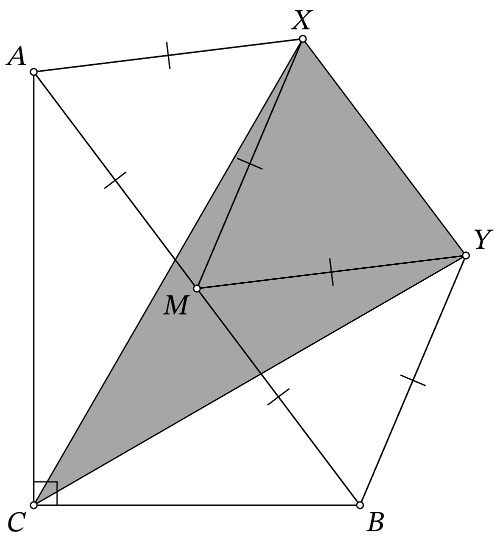

Рис. 9: К задаче 4.1

Ответ: 30, 62, 88

Решение. Заметим, что поскольку M является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, то $AM = MB = MC$, откуда получается, что точки A, B, C, X и Y лежат на окружности с центром M и радиусом MC.

Поскольку треугольник CXY вписан в эту окружность, то по теореме о вписанном угле $\angle CYX = \frac{\overset{\frown}{CX}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{AX}}{2} = \angle ABC + 30° = 62°$. Аналогично получаем, что $\angle CXY = \angle CAB + 30° = 88°$.

И, наконец, по сумме углов треугольник CXY получаем, что $\angle XCY = 30°$. $\square$

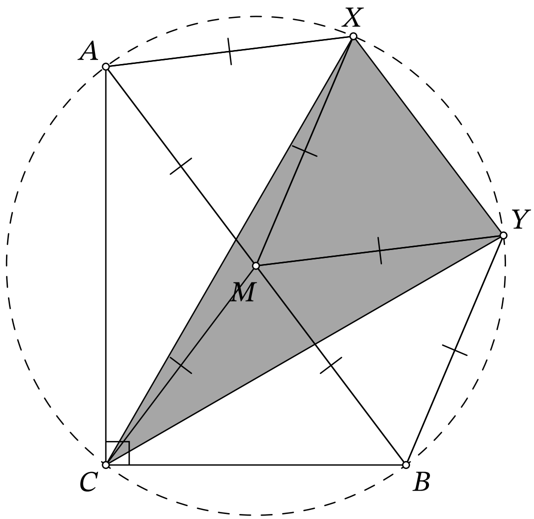

Рис. 10: К решению задачи 4.1

Вариант 4.2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили середину M. Точки X и Y расположены на плоскости так, как на рисунке, причём треугольники AMX и BMY равносторонние. Найдите углы треугольника CXY, если $\angle ABC = 37°$. Ответ выразите в градусах. Порядок ответов не важен.

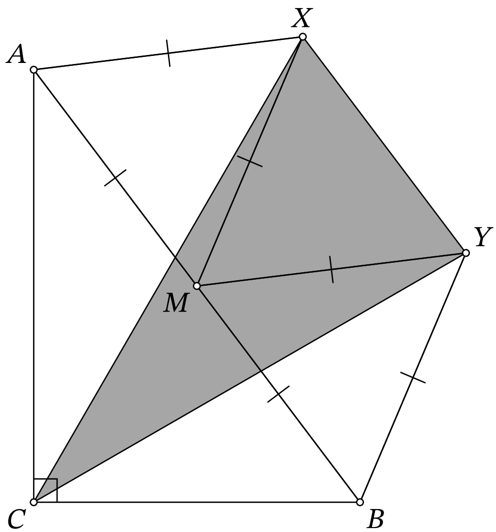

Рис. 11: К задаче 4.2

Ответ: 30, 67, 83

Вариант 4.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили середину M. Точки X и Y расположены на плоскости так, как на рисунке, причём треугольники AMX и BMY равносторонние. Найдите углы треугольника CXY, если $\angle ABC = 43°$. Ответ выразите в градусах. Порядок ответов не важен.

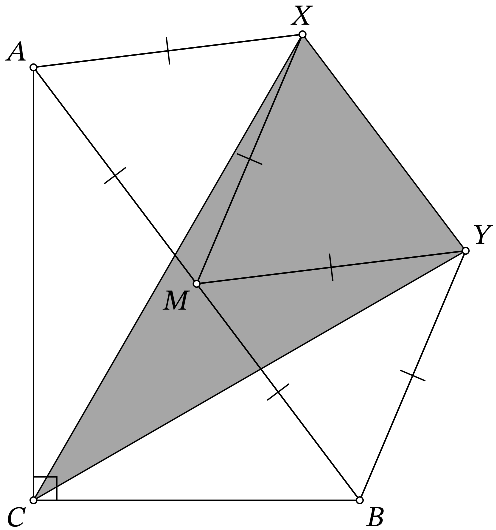

Рис. 12: К задаче 4.3

Ответ: 30, 73, 77

Вариант 4.4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили середину M. Точки X и Y расположены на плоскости так, как на рисунке, причём треугольники AMX и BMY равносторонние. Найдите углы треугольника CXY, если $\angle ABC = 46°$. Ответ выразите в градусах. Порядок ответов не важен.

Ответ: 30, 76, 74

Задача 5.1. Сколько существует таких пар натуральных чисел (a, b), что НОД$(a, b) = 1$ и $\frac{12a-11b}{a+b}$ является целым числом?

Ответ: 22

Решение. Заметим, что $\frac{12a-11b}{a+b} = 12 - \frac{23b}{a+b}$, что означает, что $23b$ делится на $a+b$. Поскольку НОД$(a, b) = 1$, 23 делится на $a+b$. Числа a и b натуральные, а число 23 является простым, поэтому это возможно только в случае, когда $a+b = 23$. Таких пар (a, b) ровно 22, все они имеют вид $(x, 23-x)$ для натурального x от 1 до 22. $\square$

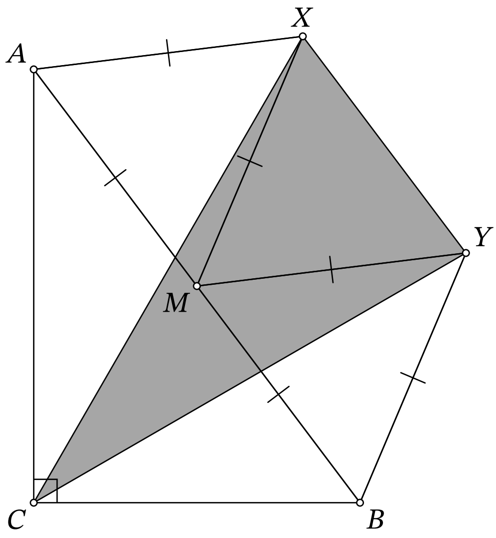

Рис. 13: К задаче 4.4

Вариант 5.2. Сколько существует таких пар натуральных чисел (a, b), что НОД$(a, b) = 1$ и $\frac{5a-14b}{a+b}$ является целым числом?

Ответ: 18

Вариант 5.3. Сколько существует таких пар натуральных чисел (a, b), что НОД$(a, b) = 1$ и $\frac{6a-23b}{a+b}$ является целым числом?

Ответ: 28

Вариант 5.4. Сколько существует таких пар натуральных чисел (a, b), что НОД$(a, b) = 1$ и $\frac{9a-22b}{a+b}$ является целым числом?

Ответ: 30

Задача 6.1. В классе стоит 31 пустой стул. Стулья расставлены по кругу и пронумерованы по порядку по часовой стрелке числами от 1 до 31. Ученики входят в класс по одному и занимают места по следующим правилам:

1. Когда ученик входит в класс, он садится на стул, номер которого соответствует числу месяца, в который он родился, если только этот стул ещё не занят.

2. Если этот стул уже занят, ученик начинает движение от этого стула по часовой стрелке и садится на первый попавшийся свободный стул.

Предположим, шесть учеников вошли в класс и заняли места как показано в таблице:

Ученик	День рождения	Номер стула
Андрей	1 мая	1
Богдан	1 февраля	2
Вадим	3 сентября	3
Глеб	3 августа	4
Дмитрий	4 апреля	5
Евгений	2 июля	6

Сколько существует различных вариантов того, в каком порядке они могли заходить в класс?

Ответ: $C_5^2 = 10$

Решение. Можно понять, что Евгений должен прийти последним, т.к. иначе он не попадёт на стул 6. Среди остальных людей Богдан должен прийти позже Андрея, а Глеб и Дмитрий – после Вадима, причём Дмитрий – после Глеба.

Получается, что если выбрать пару мест для Андрея и Богдана, то места для оставшихся троих (Вадима, Глеба и Дмитрия) будут определены однозначно. Значит, количество различных вариантов равно количеству способов выбрать пару мест для Андрея и Богдана среди пятерых, т.е. $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

□

Вариант 6.2. В классе стоит 31 пустой стул. Стулья расставлены по кругу и пронумерованы по порядку по часовой стрелке числами от 1 до 31. Ученики входят в класс по одному и занимают места по следующим правилам:

1. Когда ученик входит в класс, он садится на стул, номер которого соответствует числу месяца, в который он родился, если только этот стул ещё не занят.
2. Если этот стул уже занят, ученик начинает движение от этого стула по часовой стрелке и садится на первый попавшийся свободный стул.

Предположим, семь учеников вошли в класс и заняли места как показано в таблице:

Ученик	День рождения	Номер стула
Андрей	1 мая	1
Богдан	1 февраля	2
Вадим	3 сентября	3
Глеб	3 августа	4
Дмитрий	4 апреля	5
Евгений	4 января	6
Захар	2 июля	7

Сколько существует различных вариантов того, в каком порядке они могли заходить в класс?

Ответ: $C_6^2 = 15$

Вариант 6.3. В классе стоит 31 пустой стул. Стулья расставлены по кругу и пронумерованы по порядку по часовой стрелке числами от 1 до 31. Ученики входят в класс по одному и занимают места по следующим правилам:

1. Когда ученик входит в класс, он садится на стул, номер которого соответствует числу месяца, в который он родился, если только этот стул ещё не занят.
2. Если этот стул уже занят, ученик начинает движение от этого стула по часовой стрелке и садится на первый попавшийся свободный стул.

Предположим, восемь учеников вошли в класс и заняли места как показано в таблице:

Ученик	День рождения	Номер стула
Андрей	1 мая	1
Богдан	1 февраля	2
Вадим	3 сентября	3
Глеб	3 августа	4
Дмитрий	4 апреля	5
Евгений	4 января	6
Захар	5 декабря	7
Игорь	2 июля	8

Сколько существует различных вариантов того, в каком порядке они могли заходить в класс?

Ответ: $C_7^2 = 21$

Вариант 6.4. В классе стоит 31 пустой стул. Стулья расставлены по кругу и пронумерованы по порядку по часовой стрелке числами от 1 до 31. Ученики входят в класс по одному и занимают места по следующим правилам:

1. Когда ученик входит в класс, он садится на стул, номер которого соответствует числу месяца, в который он родился, если только этот стул ещё не занят.
2. Если этот стул уже занят, ученик начинает движение от этого стула по часовой стрелке и садится на первый попавшийся свободный стул.

Предположим, девять учеников вошли в класс и заняли места как показано в таблице:

Ученик	День рождения	Номер стула
Андрей	1 мая	1
Богдан	1 февраля	2
Вадим	3 сентября	3
Глеб	3 августа	4
Дмитрий	4 апреля	5
Евгений	4 января	6
Захар	5 декабря	7
Игорь	5 октября	8
Кирилл	2 июля	9

Сколько существует различных вариантов того, в каком порядке они могли заходить в класс?

Ответ: $C_8^2 = 28$

Задача 7.1. Окружность пересекает стороны BC и AD прямоугольника $ABCD$ в точках P, Q, X и Y так, как показано на рисунке. Найдите длину отрезка DY, если известно, что $BP = 2$, $QC = 5$, $AX = 1$.

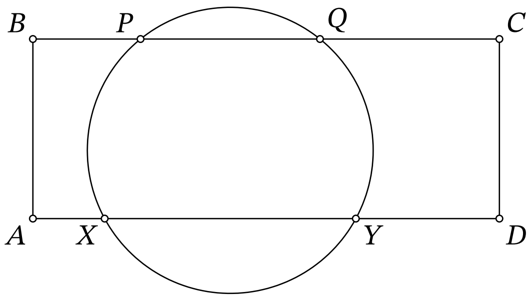

Рис. 14: К задаче 7.1

Ответ: 4

Решение. Заметим, что четырёхугольник $PQYX$ является равнобокой трапецией, поскольку он вписан в окружность и $PQ \parallel XY$. Отметим точку S — середину PQ и точку T — середину XY. Из-за равнобокости трапеции $PQYX$ прямая ST является серединным перпендикуляром к отрезкам PQ и XY. Тогда четырёхугольники $ABST$ и $TSCD$ являются прямоугольниками.

Тогда $BS = AT$ и $SC = TD$.

$$BS + TD = AT + SC$$

$$BP + PS + TY + YD = AX + XT + SQ + QC$$

$$BP + YD = AX + QC$$

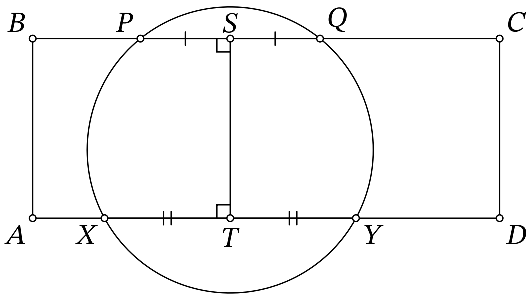

Рис. 15: К решению задачи 7.1

Откуда следует, что $DY = AX + QC - BP = 5 + 1 - 2 = 4$.

$\square$

Вариант 7.2. Окружность пересекает стороны BC и AD прямоугольника $ABCD$ в точках P, Q, X и Y так, как показано на рисунке. Найдите длину отрезка DY, если известно, что $BP = 3$, $QC = 7$, $AX = 2$.

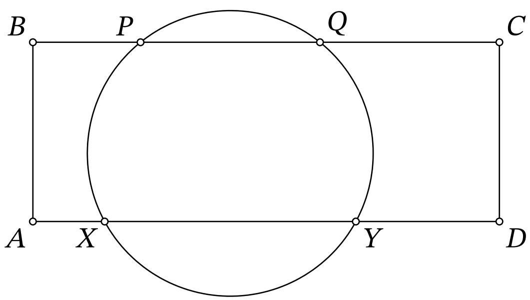

Рис. 16: К задаче 7.2

Ответ: 6

Вариант 7.3. Окружность пересекает стороны BC и AD прямоугольника $ABCD$ в точках P, Q, X и Y так, как показано на рисунке. Найдите длину отрезка DY, если известно, что $BP = 4$, $QC = 7$, $AX = 2$.

Ответ: 5

Вариант 7.4. Окружность пересекает стороны BC и AD прямоугольника $ABCD$ в точках P, Q, X и Y так, как показано на рисунке. Найдите длину отрезка DY, если известно, что $BP = 5$, $QC = 9$, $AX = 2$.

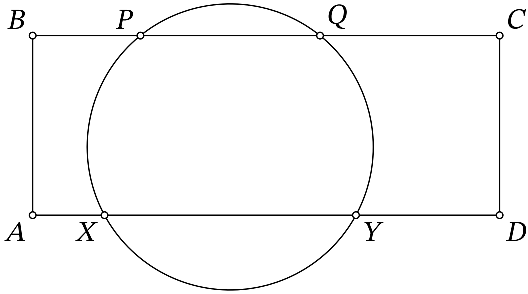

Рис. 17: К задаче 7.3

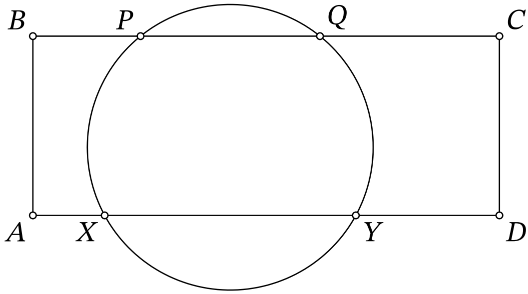

Рис. 18: К задаче 7.4

Ответ: 6

Задача 8.1. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такова, что a_n равен первой ненулевой цифре десятичной записи числа $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Сколько среди первых 600000 членов этой последовательности таких, которые равны 1?

Ответ: 357576

Решение. Заметим, что $a_1 = 1$. Пусть для некоторого $n > 1$ выполнено $a_n = 1$, тогда $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,0\ldots01\ldots$. Предположим, что 1 стоит на k-ом месте. Тогда выполнено неравенство

$$\frac{1}{10^k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{10^k}$$

Возведём неравенство в квадрат (используя, что все числа положительные)

$$\frac{1}{10^{2k}} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{4}{10^{2k}}$$

$$\frac{10^{2k}}{4} < n \leqslant 10^{2k}$$

Получается, что если $n > 1$, то должно находиться в одном из следующих полуинтервалов:

$$(25, 100] \quad (2500, 10000] \quad (250000, 1000000] \quad (25000000, 100000000] \quad \ldots$$

Среди чисел n от 1 до 600000 подходящих нам будет ровно

$$1 + (100 - 25) + (10000 - 2500) + (600000 - 250000) = 1 + 75 + 7500 + 3500000 = 357576$$

□

Вариант 8.2. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такова, что a_n равен первой ненулевой цифре десятичной записи числа $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Сколько среди первых 700000 членов этой последовательности таких, которые равны 1?

Ответ: 457576

Вариант 8.3. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такова, что a_n равен первой ненулевой цифре десятичной записи числа $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Сколько среди первых 800000 членов этой последовательности таких, которые равны 1?

Ответ: 557576

Вариант 8.4. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такова, что a_n равен первой ненулевой цифре десятичной записи числа $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Сколько среди первых 900000 членов этой последовательности таких, которые равны 1?

Ответ: 657576