

## Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

**Задание 1. Вариант 1.** Овца привязана верёвкой длиной  $L$  к колышку на земле. Она съедает всю доступную траву вокруг за 1 час. Ягнёнок ест траву в 2 раза медленнее.

а) За сколько часов съедает всю доступную траву вокруг себя ягнёнок, привязанный такой же верёвкой?

**Ответ:** 2

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 1 балл

б) За сколько минут съедают всю доступную траву вокруг себя ягнёнок и овца, привязанные такими же верёвками к одному колышку?

**Ответ:** 40

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 3 балла

в) За сколько часов съедает всю доступную траву вокруг себя овца, привязанная верёвкой длиной  $2L$ ?

**Ответ:** 4

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

г) Баран ест в 3 раза быстрее ягнёнка. Два барана, привязанные верёвками длиной  $L$  к одному колышку съедают всю доступную траву вокруг себя за 2 часа. Какую часть времени бараны дерутся между собой, если всё, что они делают — это едят и дерутся? Ответ запишите в виде обыкновенной дроби (например,  $12/17$ ).

**Ответ:**  $5/6$

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 4 балла

**Максимальный балл за задание — 10**

**Решение.**

а) Так как скорость поедания  $Q_{\text{я}}$  у ягнёнка в 2 раза ниже, чем у овцы  $Q_{\text{о}}$  при том же запасе доступной травы  $M$ , время увеличится в 2 раза:  $t_{\text{я}} = 2t_{\text{о}} = 2$  ч.

б) В этом случае скорости поедания складываются:

$$t_2 = \frac{M}{Q_{\text{о}} + Q_{\text{я}}} = \frac{M}{\frac{M}{t_{\text{о}}} + \frac{M}{t_{\text{я}}}} = \frac{t_{\text{о}}t_{\text{я}}}{t_{\text{о}} + t_{\text{я}}} = \frac{2}{3} \text{ часа} = 40 \text{ мин.}$$

в) Запас травы пропорционален доступной площади, площадь пропорциональна квадрату характерного размера фигуры (в нашем случае  $L$ ). То есть травы больше в 4 раза.

$$t_3 = \frac{4M}{Q_{\text{о}}} = 4t_{\text{о}} = 4 \text{ ч.}$$

г) Не мешая друг другу, бараны съели бы всю траву за

$$t_4 = \frac{M}{3Q_{\text{я}} + 3Q_{\text{я}}} = \frac{M}{3Q_{\text{о}}} = \frac{1}{3} \text{ часа.}$$

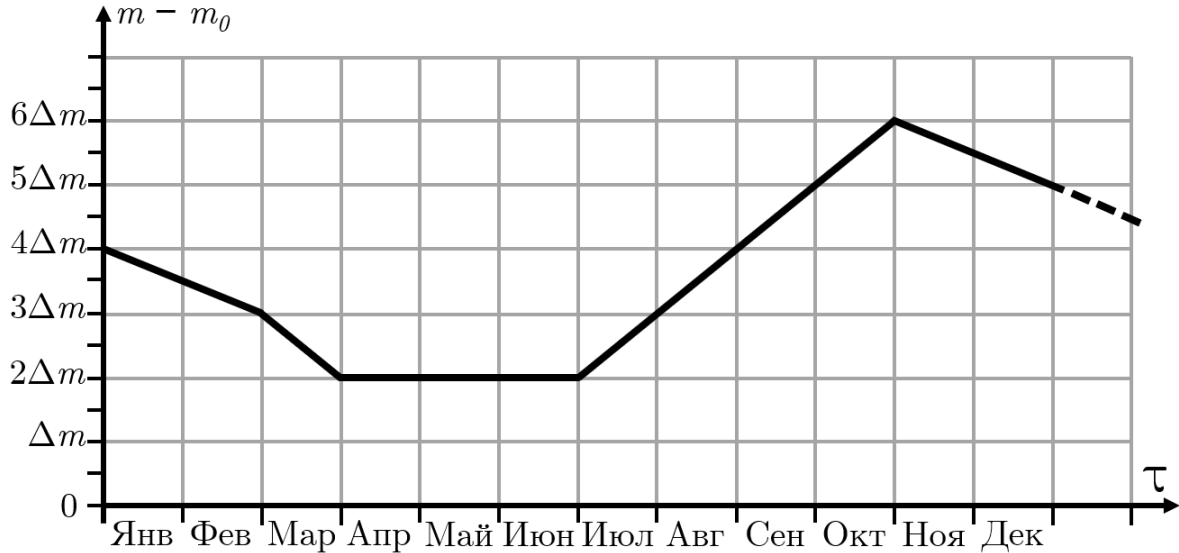
Но они съедают траву за  $t_6 = 2$  ч, тратя на драки

$$\frac{t_6 - t_4}{t_6} = \frac{5}{6} \text{ доступного времени.}$$

## Матрица параметров и ответов к вариантам задания 1.

№ варианта	Время поедания травы овцой, ч	Отношение скоростей поедания травы барана и ягнёнка	Время поедания травы 2 баранами, ч	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)
1	1	3	2	2	40	4	$5/6$
2	1	3	4	2	40	4	$11/12$
3	1	3	5	2	40	4	$14/15$
4	1	4	2	2	40	4	$7/8$

**Задание 2. Вариант 1.** Медведи некоторых видов впадают зимой в спячку. За это время они могут значительно потерять в своей массе. Дан график зависимости прироста массы тела одного медведя от времени в течение календарного года по сравнению с первым наблюдением за ним несколько лет назад.



Здесь  $m_0 = 150$  кг, а  $\Delta m = 10$  кг.

а) Сколько месяцев в этом году медведь худел?

**Ответ:** 5

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 1 балл

б) Какой была максимальная масса медведя в этом году? Ответ выразите в килограммах.

**Ответ:** 210

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

в) На сколько изменилась масса медведя за этот календарный год? Ответ выразите в килограммах.

**Ответ:** 10

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько килограммов медведь терял за месяц зимой?

**Ответ:** 5

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

д) Чему равна средняя масса мартовского медведя в этом году? Ответ выразите в килограммах.

**Ответ:** 175

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 3 балла

**Максимальный балл за задание — 10**

**Решение.**

а) Масса медведя снижалась с января по март, в ноябре и в декабре, всего 5 месяцев.

б) Судя по графику, максимальная масса у медведя была в конце октября  $m_{\max} = m_0 + 6\Delta m = 210$  кг.

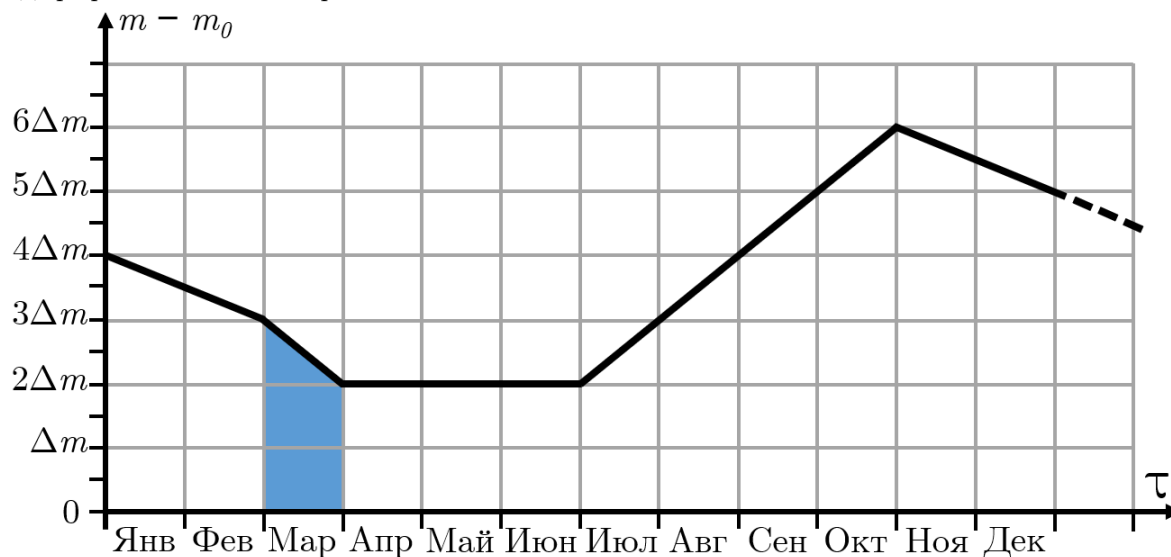
в) Масса в начале года —  $m_0 + 4\Delta m$ , масса в конце года —  $m_0 + 5\Delta m$ . Прирост массы  $\Delta m = 10$  кг.

г) В январе, феврале и декабре медведь терял за месяц  $\frac{\Delta m}{2} = 5$  кг.

д) Так как масса медведя в течение месяца меняется равномерно, среднюю массу можно найти как среднее арифметическое значение масс в начале и конце марта либо как значение массы в середине месяца:

$$m_{\text{ср}} = \frac{(m_0 + 3\Delta m) + (m_0 + 2\Delta m)}{2} = m_0 + 2.5\Delta m = 175 \text{ кг.}$$

Более общее решение (справедливое при любом законе изменения массы во времени) заключается в нахождении площади под графиком массы за март.

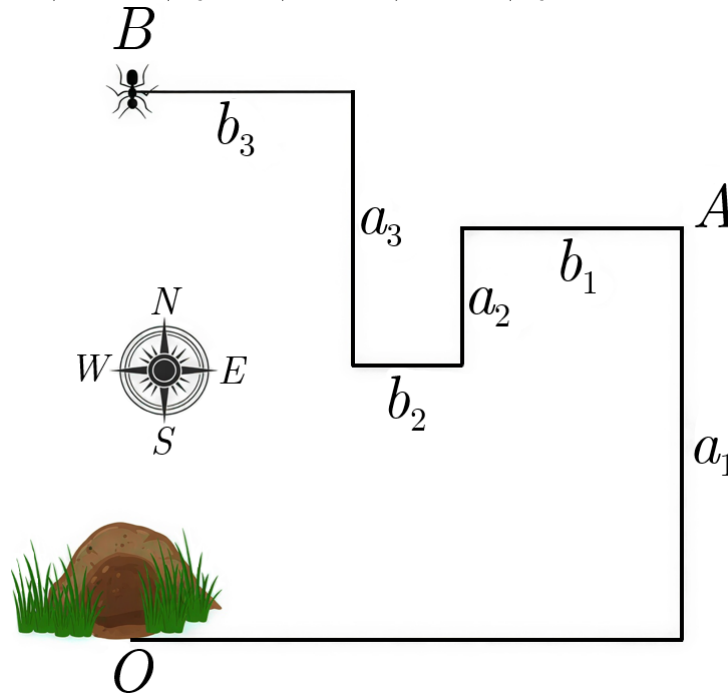


Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2.

№ варианта	$m_0$ , кг	$\Delta m$ , кг	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)
1	150	10	210	10	5	175
2	250	10	310	10	5	275
3	350	10	410	10	5	375
4	200	12	272	12	6	230

**Задание 3. Вариант 1.** Муравей отправился от муравейника (точка  $O$  на рисунке) на восток за вкусняшкой со скоростью 4 см/с. Спустя некоторое время он нашёл её в точке  $A$  и двинулся обратно к муравейнику с вдвое меньшей скоростью. В результате блужданий на обратном пути он оказался в точке  $B$ , расположенной строго к северу от муравейника. Траектория движения муравья представлена на рисунке, все отрезки пути ориентированы по сторонам света.

Размеры на рисунке  $a_1 = 3$  м,  $a_2 = 1$  м,  $a_3 = 2$  м,  $b_1 = 2$  м,  $b_2 = 1$  м,  $b_3 = 2$  м.



а) С какой скоростью нёс вкусняшку муравей? Ответ выразите в см/с.

**Ответ:** 2

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 1 балл

б) Сколько метров прополз муравей на пути  $AB$ ?

**Ответ:** 8

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

в) Сколько секунд потратил муравей на путь  $AB$ ?

**Ответ:** 400

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько метров осталось муравью тащить вкусняшку от  $B$  напрямую до муравейника?

**Ответ:** 4

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 2 балла

д) Определите среднюю путевую скорость муравья на участке  $OAB$ . Ответ выразите в см/мин.

**Ответ:** 160

**Критерий оценивания:** точное совпадение ответа — 3 балла

**Максимальный балл за задание — 10**

**Решение.**

а) По условию скорость упала в 2 раза:  $v_1 = \frac{v_0}{2} = 2$  см/с.

б)  $S_{AB} = a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 8$  м.

в)  $t_{AB} = \frac{S_{AB}}{v_1} = \frac{800 \text{ см}}{2 \text{ см/с}} = 400$  с.

г)  $S_{BO} = a_1 - a_2 + a_3 = 4$  м.

д) Заметим, что путь от муравейника до первого поворота равен  $b_1 + b_2 + b_3$ .

Путь  $S_{OAB} = S_{AB} + a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = 16$  м = 1600 см.

Участок  $OA$  муравей преодолел за время  $t_{OA} = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + b_3}{v_0} = 200$  с.

Участок  $AB$ , как мы знаем, муравей преодолел за время  $t_{AB} = 400$  с.

Средняя скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{OAB}}{t_{AB} + t_{OA}} = \frac{1600 \text{ см}}{600 \text{ с}} = \frac{1600 \text{ см}}{10 \text{ мин}} = 160 \text{ см/мин.}$$

## Матрица параметров и ответов к вариантам задания 3.

№ варианта	Скорость муравья, см/с	$a_1$ , м	$a_2$ , м	$a_3$ , м	$b_1$ , м	$b_2$ , м	$b_3$ , м	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)
1	4	3	1	2	2	1	2	2	8	400	4	160
2	8	3	1	2	2	1	2	4	8	200	4	320
3	20	3	1	2	2	1	2	10	8	80	4	800
4	32	3	1	2	2	1	2	16	8	50	4	1280